

4. ベクトルの内積

空間ベクトルの内積

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ の値を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積** といい、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書く。つまり

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ただし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ はどちらも $\vec{0}$ でないとし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と約束する。

基本的に平面のときと内積の計算も同様。下の問題でポイントを確認しよう。

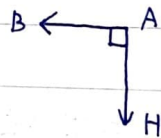
問5

$$(1) \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

$$= |\vec{AB}||\vec{AH}|\cos 90^\circ$$

$$= 0$$

教科書P60の図で面CGHDを手前に
みる見方をすると $\vec{AB}$ と $\vec{AH}$ の位置関係は
下のようにならないかな？



$$(2) \vec{AF} \cdot \vec{AH}$$

$$= |\vec{AF}||\vec{AH}|\cos 60^\circ$$

$$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2.$$

ただ図とにらめ、こしていても
 $\vec{AF}$ と $\vec{AH}$ のなす角はわからないよ。
でも $\triangle AFH$ に注目すると 60° の理由が
わかるはず！

「適切な平面を取り出して考える」
ことが大切だよ。

← $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の $\cdot$ の省略NG!

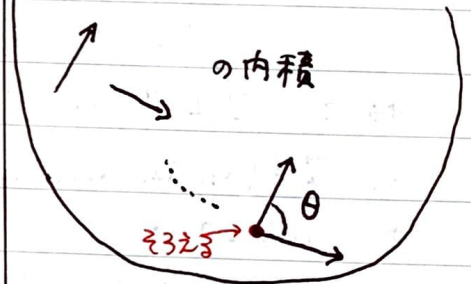
← 内積の定義。これは身につけ

ていないと計算ができない。

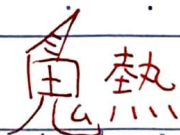
必ず身につけよう。

Point

内積を考えるときは2つの
ベクトルの 始点 をそろえよう!



※ 問5では初めから始点
Aでそろえているので必要ない
けど。



空間ベクトルの内積

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ はどちらも $\vec{0}$ でないとする.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角で } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

もし $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示されているときは

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

← 前ページのもの.

← 同じ成分どうしをかけてそれぞれ足す.

空間ベクトルのなす角

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ はどちらも $\vec{0}$ でないとし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ より

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

平面と同じですね.

← つまりなす角 θ は

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積とそれぞれの大きさがわかれば求められる!

特に $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

もし $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示されているときは

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

成分表示されているかしないかのちがいは、平面と同じ神熱キーワードです.

ベクトルが垂直 $\Leftrightarrow$ 内積 0

内積の性質

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (k: \text{実数})$$

← 平面のときと全く同じ

6つの性質をもちます.

教科書 P24, 25 の内積の性質 I, II と見比べてみましょう.

問6 まず内積から求めよう!

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, 1) \cdot (-2, 2, 4) \\ &= 1 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 4 = 6. //\end{aligned}$$

次に $\vec{a}$ の大きさ, $\vec{b}$ の大きさを求めたら θ を求めよう!

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6} \text{ あり}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

「 $\theta =$ 」とわかっている
ように!

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ あり } \theta = 60^\circ. //$$

例題2 → 動画.

← θ はいきなり求められません.
必ず $\cos \theta$ から考えよう.

5 位置ベクトル

空間においても、1点Oを固定すると、任意の点Pの位置はベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ によって定められる。 $\vec{p}$ を点Oに関する点Pの位置ベクトルという。
位置ベクトルが $\vec{p}$ である点P $P(\vec{p})$ と表す。

位置ベクトルの性質

- 1 2点 $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
- 2 2点 $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点をP、外分する点をQ、 $P(\vec{p})$ 、 $Q(\vec{q})$ とすると

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}, \quad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

ばってんの1x-ジ

特に線分ABの中点Mの位置ベクトル $\vec{m}$ は

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad 1:1 \text{ に内分}$$

3 3点 $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ 、 $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

例5 いまなり $H(\vec{h})$ は求められないので、何段階かに分けて近づけていこう。

$\triangle BCD$ の重心Gの位置ベクトルは上の通り

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

Hは線分AGを3:1に内分する点であるから

$$\vec{h} = \frac{1\vec{a} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{4}$$

$$3\vec{g} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \text{ より } \vec{h} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

← 固定...基準にするという解釈でよい。

← $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ 、 $C(\vec{c})$ など...

← 要はこれも「うしろまえ」

← みんなはこの形3回目? 4回目... もういいでしょ...

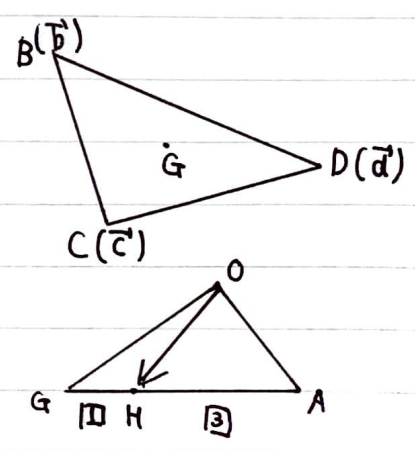
例. 線分ABを1:3に内分

$$\rightarrow \vec{p} = \frac{3\vec{a} + 1\vec{b}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

例. 線分ABを4:5に外分

$$\rightarrow \vec{p} = \frac{-5\vec{a} + 4\vec{b}}{4-5} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$$

② これまでの位置ベクトルはかかれていないけれど、Oを基準として考えている。



No.

Date

応用例題1 → 動画