例題1

$a_{n+1} = a_n + \underbrace{値}_{公差}$ ← 等差数列の型

$a_n =$ 初項 $+ (n-1) \times$ 公差

$a_{n+1} = \underbrace{値}_{公比} a_n$ ← 等比数列の型

$a_n =$ 初項 $\times$ 公比$^{n-1}$

$a_{n+1} = a_n + \underbrace{nの式}$ ← 階差数列の型

$n \geqq 2$のとき $a_n =$ 初項 $+ \sum_{k=1}^{n-1}$ kの式

上の型を見たら、すぐに一般項を求められる。

(1) $a_{n+1} = a_n + 5$ より

$a_n = 1 + (n-1) \times 5$

$= 5n - 4$.

(2) $a_{n+1} = 5a_n$ より

$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

(3) $a_{n+1} = a_n + 4^n$ より

$n \geqq 2$のとき $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$

$4^k = 4 \cdot 4^{k-1}$ なので

初項4、公比4の等比数列の

第$n-1$項までの和

等比数列の和 $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ を利用。

$= 1 + \dfrac{4(1-4^{n-1})}{1-4}$

$= 1 - \dfrac{4-4^n}{3}$

$= \dfrac{4^n - 1}{3}$

$n=1$のとき $\dfrac{4^1-1}{3} = 1$ より成り立つ。よって $a_n = \dfrac{4^n-1}{3}$

例題2

$a_{n+1} = $ 値 $a_n +$ 値 ← 2項間漸化式

例題2以降の問題は、与えられた式を工夫して
例題1の 等差、等比、階差 の型に変形することがポイントです。

2項間漸化式は、与えられた式を
$a_{n+1} - \alpha = $ 値 $(a_n - \alpha)$ の形に変形する
ここで $a_n - \alpha = b_n$ とすると
$b_{n+1} = $ 値 b_n となり、等比の型になる。

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ より
$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ ← なぜ、このように変形できたかというと、
ここで $a_n + 3 = b_n$ とすると…①
$b_{n+1} = 2b_n$ ← 等比型
$b_n = b_1 \times 2^{n-1}$
①より $b_1 = a_1 + 3$
$= 4$
よって $b_n = 4 \times 2^{n-1}$
$= 2^{n+1}$
以上より $a_n + 3 = 2^{n+1}$
$a_n = 2^{n+1} - 3$

$a_{n+1} = 2a_n \boxed{+3}$ を
$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ に変形したい
$a_{n+1} = 2a_n - 2\alpha + \alpha$
$a_{n+1} = 2a_n \boxed{-\alpha}$
よって
$-\alpha = 3$
$\alpha = -3$
これを右の様に考える

$-2\alpha + \alpha = 3$
$\alpha = 2\alpha + 3$
これは、与えられた式の
a_{n+1} と a_n を α にしたもの

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 3 \\ \alpha &= 2\alpha + 3 \end{aligned}}$$

最終的にこの式から α を求め
与えられた式を
$a_{n+1} - \alpha = $ 値 $(a_n - \alpha)$
にすぐ変形してしまう。

この解答の様に $a_n + 3 = b_n$ と置き換え
ていくのも大変なので、次の様に計算してみよう。

$\underline{a_{n+1} + 3} = \underset{公比}{2}\,\underline{(a_n + 3)}$ ← 等比型

$a_n + 3 = \underset{初項}{(a_1 + 3)} \cdot \underset{公比^{n-1}}{2^{n-1}}$

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3$
$= 2^{n+1} - 3$

例題3

$a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$ ← 3^{n+1}に注目して.(与式)を3^{n+1}で割ることで工夫できる

両辺を3^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot a_n}{3 \cdot 3^n} + 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + 1$$

ここで $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とすると …①

$b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + 1$ ← 2項間漸化式

$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + 1$

$3\alpha = 2\alpha + 3$

$\alpha = 3$

$$b_{n+1} - 3 = \underbrace{\frac{2}{3}}_{公比}(b_n - 3)$$

$$b_n - 3 = \underbrace{(b_1 - 3)}_{初項} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{公比}{}^{n-1}$$

①より $b_1 = \frac{a_1}{3} = 1$ より

$$b_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$$

①より $a_n = \left\{-2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3\right\} \cdot 3^n$

$$= -2 \cdot 2^{n-1} \cdot 3 + 3^{n+1}$$

$$= 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$$

練習3のヒント. 3^nがなければ2項間漸化式になるので

両辺に3^nをかけてみよう.

例題4.

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+3}$$ ← 分数の形の与式は逆数をとることで工夫できる.

両辺の逆数をとると.

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n+3}{3a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{\cancel{a_n}}{3\cancel{a_n}} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$$

ここで $\frac{1}{a_n} = b_n$ とすると …①

$$b_{n+1} = b_n + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{公差}}$$ ← 等差型

$$b_n = b_1 + (n-1) \times \frac{1}{3}$$

①より) $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ より)

$$b_n = 1 + \frac{n-1}{3}$$

$$= \frac{n+2}{3}$$

①より)

$$a_n = \frac{3}{n+2}$$

この式から.

$$\frac{1}{a_n} = \underbrace{\frac{1}{a_1}}_{\text{初項}} + (n-1) \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{公差}}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{3}$$

$$= \frac{n+2}{3}$$

よって

$$a_n = \frac{3}{n+2}$$

と計算すると楽です.

例題4までは.センターレベルで必須の問題パターンです.
次回から2次レベルです.
漸化式は.入試に出題されるパターンを一通りやって身に付けましょう.