《第2節 等式・不等式の証明》

6 等式の証明

■■恒等式の証明

恒等式 $A=B$ の証明方法
1 A か B の一方を変形して，他方を導く。
2 A と B の両方を変形して，同じ式を導く。
3 $A-B$ を変形して，0 になることを示す。

■■条件つきの等式の証明

① 条件式を用いて文字を消去し，上に示した恒等式の証明方法で行う。

② 条件式が $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ （$\Longleftrightarrow$ $a:b=c:d$，$a:c=b:d$）のような比の値を用いた式のときは，（比の値）$=k$ とおく。

※ 以下，分数式では，分母＝0 となる場合を除く。

TRIAL A

*36 次の等式を証明せよ。 →教p.23 例題 7

(1) $x^2-2y^2+2z^2+xy+3yz+3zx=(x+2y+z)(x-y+2z)$

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$

37 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。 →教p.24 例題 8

(1) $a^2-2bc=b^2+c^2$　　*(2) $2a^2+bc=(a-b)(a-c)$

*(3) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=0$

*38 (1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=2$ のとき，$\dfrac{a+3c}{b+3d}$ の値を求めよ。 →教p.25 例 11

(2) $x:y=2:3$ のとき，$\dfrac{3x+y}{x+2y}$ の値を求めよ。

TRIAL B

39 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ma+nc}{mb+nd}$ を証明せよ。 →教p.25 応用例題 3

40 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，等式 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}$ を証明せよ。

41 $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ のとき，等式 $x+y+z=0$ を証明せよ。

ヒント 38 (2) $x:y=2:3 \longrightarrow x=2k$，$y=3k$ とおく。
41 （比の値）$=k$ とおく。3つの等式 $y+z=(b-c)k$，…… の辺々を加える。

7 不等式の証明

注 以下では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする。

■■実数の大小関係

1 $a>b$，$b>c \Longrightarrow a>c$

2 $a>b \Longrightarrow a+c>b+c$，$a-c>b-c$

3 $a>b$，$c>0 \Longrightarrow ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

4 $a>b$，$c<0 \Longrightarrow ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

5 $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$

6 $a<b \Longleftrightarrow a-b<0$

■■不等式の証明

不等式を証明するには，上記の実数の大小関係，および以下の性質を利用する。

実数の平方の性質　$a^2\geqq 0$　（等号が成り立つのは $a=0$ のとき）
$a^2+b^2\geqq 0$　（等号が成り立つのは $a=b=0$ のとき）

平方の大小関係　$a>0$，$b>0$ のとき
$a^2>b^2 \Longleftrightarrow a>b$　　$a^2\geqq b^2 \Longleftrightarrow a\geqq b$

絶対値　$|a|\geqq 0$，$|a|\geqq a$，$|a|\geqq -a$，$|a|^2=a^2$，$|ab|=|a||b|$

相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　（等号が成り立つのは $a=b$ のとき）

TRIAL A

42 a，b，c，d が正の数で $a>b$ かつ $c>d$ のとき，$ac>bd$ であることを証明せよ。 →教p.26 例 12

*43 $x>y$ のとき，$\dfrac{x+2y}{3}>\dfrac{x+3y}{4}$ であることを証明せよ。 →教p.27 例題 9

44 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。 →教p.28 例 13，例題 10

(1) $4(x+1)\geqq -x^2$　　(2) $a^2+ab+b^2\geqq 3ab$

*(3) $x^2+2xy\geqq -2y^2$　　(4) $2x^2+3y^2\geqq 4xy$

(5) $10x^2-6xy+y^2\geqq 0$　　*(6) $9x^2\geqq y(6x-y)$

45 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。 →教p.29 例題 11

(1) $(a+b)\sqrt{ab}\geqq 2ab$　　*(2) $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$

46 $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。 →教p.31 例題 12

(1) $2a+\frac{3}{a}\geqq 2\sqrt{6}$　*(2) $9ab+\frac{1}{ab}\geqq 6$　(3) $a+b+\frac{1}{a+b}\geqq 2$

TRIAL B

***47** $a>b>c>d$ のとき，$ab+cd$ と $ac+bd$ の大小を不等号を用いて表せ。 →教p.32 補充問題 7

***48** $x>3$, $y>-1$ のとき，次の不等式を証明せよ。 →教p.27 応用例題 4

$xy-3>3y-x$

49 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)\geqq(x^3+y^3)^2$　*(2) $x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

(3) $x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$　*(4) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

50 $a>0$, $b>0$ のとき，$\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

***51** 不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\leqq|x|+|y|\leqq\sqrt{2(x^2+y^2)}$ を証明せよ。 →教p.30 応用例題 5

52 不等式 $|a|-|b|\leqq|a+b|$ を証明せよ。

***53** $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。 →教p.32 補充問題 8

(1) $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)\geqq 4$　(2) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(4b+\frac{1}{a}\right)\geqq 9$

◆**54** $0<a<b$, $a+b=2$ のとき，次の数を小さい順に並べよ。

1, a, b, ab, $\frac{a^2+b^2}{2}$

▶ヒント
47 2つの式 A, B の大小は $A-B$ の符号で調べる。本問では，$A-B$ を因数分解して各因数の符号を調べる。
52 $|a|-|b|<0$ のときと $|a|-|b|\geqq 0$ のときに場合を分けて証明する。
53 左辺を展開して，相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。
54 条件を満たす適当な数値を代入して，大小の見当をつけて証明する。

練習問題

「少なくとも1つは a」の式の表し方

例題 12 $x+y+z=a$, $a(xy+yz+zx)=xyz$ のとき，x, y, z のうち，少なくとも1つは a であることを証明せよ。

考え方 x, y, z のうち少なくとも1つは a であることは次の等式で表される。

$(x-a)(y-a)(z-a)=0$　⇐ $x=a$ または $y=a$ または $z=a$

証明 $(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-(xy+yz+zx)a+(x+y+z)a^2-a^3$
$=a(xy+yz+zx)-a(xy+yz+zx)+a\cdot a^2-a^3$
$=0$

よって　$x-a=0$ または $y-a=0$ または $z-a=0$

ゆえに　$x=a$ または $y=a$ または $z=a$

したがって，x, y, z のうち，少なくとも1つは a である。 終

55 $x+y+z=-1$, $xy+yz+zx+xyz=0$ のとき，x, y, z のうち，少なくとも1つは -1 であることを証明せよ。

相加平均と相乗平均の大小関係を利用して最小値を求める

例題 13 $x>0$, $y>0$, $xy=4$ のとき，$x+y$ の最小値を求めよ。

考え方 相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

解答 $x>0$, $y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{4}=4$

よって　$x+y\geqq 4$

等号が成り立つのは，$x>0$, $y>0$, $xy=4$, $x=y$ から，$x=y=2$ のときである。

したがって　$x=y=2$ のとき　最小値 4 答

56 $x>0$, $y>0$, $xy=4$ のとき，$2x+y$ の最小値を求めよ。

57 $x>0$ のとき，$x+\frac{4}{x}$ の最小値を求めよ。

◆**58** $a>b\geqq c>0$ のとき，次の $\square$ に $\geqq$, $\leqq$, $>$, $<$ のどれかを入れて正しい関係が成り立つようにせよ。ただし，これが不可能の場合には × とせよ。

(1) $ab+bc\ \square\ b^2+ca$　(2) $a^2+2bc\ \square\ 2ab+ca$

(3) $b^2+c^2\ \square\ a^2+2bc$

《第1節　複素数と2次方程式の解》

1　複素数とその計算

複素数

2乗すると -1 になる新しい数を1つ考え，これを文字 i で表す。すなわち $i^2=-1$ とする。この i を **虚数単位** という。

1　$a+bi$（a，b は実数）の形に表される数を **複素数** という。
　複素数 $a+bi$ では，a を **実部**，b を **虚部** という。

2　$b\neq 0$ のときの複素数 $a+bi$ を **虚数** といい，とくに $a=0$ である虚数 bi を **純虚数** という。

複素数の相等　a，b，c，d を実数とする。

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

$$\text{とくに}\quad a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

注　本書で「複素数 $a+bi$」のように書いたら，とくに断らなくても，a，b は実数とする。

複素数の計算

1　加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
　減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
　乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
　除法　$\dfrac{c+di}{a+bi}=\dfrac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

2　**共役な複素数**　2つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに **共役な複素数** という。

負の数の平方根

$a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　とくに　$\sqrt{-1}=i$
　　$-a$ の平方根は　$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

TRIAL A

59　次の複素数の実部と虚部をいえ。　→教p.37 例1

(1)　$2+3i$　　(2)　$-3-i$　　(3)　πi　　(4)　$\dfrac{2-\sqrt{5}\,i}{3}$

60　次のような実数 x，y を求めよ。　→教p.37 例題1

(1)　$x+yi=3+4i$　　(2)　$(x-3)+(y+1)i=0$
*(3)　$(x+3y)+(2x-y)i=9+4i$　　(4)　$(x-y)+(x-2y)i=2-i$

61　次の式を計算せよ。　→教p.38 例2

(1)　$(4+2i)+(3+i)$　　*(2)　$(3-2i)+(2-i)$
(3)　$(2+3i)-(3+i)$　　*(4)　$(3-i)-(1-i)$
(5)　$(3+i)+4i$　　(6)　$6i-9i$

62　次の式を計算せよ。　→教p.38 例3

(1)　$(1+3i)(2+i)$　　*(2)　$(1-2i)(5+2i)$　　*(3)　$(3-2i)^2$
(4)　$(1+i)^2$　　(5)　$(2-i)(2+i)$　　*(6)　$(4+3i)(4-3i)$

63　次の複素数と共役な複素数をいえ。　→教p.38 例4，練習5

(1)　$5+4i$　　*(2)　$3-2i$　　*(3)　$\sqrt{3}$
*(4)　$-5i$　　(5)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}$　　(6)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

64　次の式を計算せよ。　→教p.39 例5

*(1)　$\dfrac{3+i}{1+2i}$　　*(2)　$\dfrac{2-i}{2+i}$　　(3)　$\dfrac{2i}{3-i}$
(4)　$\dfrac{1}{2i}$　　(5)　$\dfrac{3+i}{2-i}$　　*(6)　$\dfrac{4-5i}{i}$

65　次の数を i を用いて表せ。　→教p.40 例6

(1)　$\sqrt{-3}$　　(2)　$\sqrt{-4}$　　*(3)　$2+\sqrt{-5}$
(4)　$-\sqrt{-7}$　　(5)　-3 の平方根　　*(6)　-8 の平方根

66　次の式を計算せよ。　→教p.40 例7

*(1)　$\sqrt{-2}\sqrt{-8}$　　(2)　$-\sqrt{-3}\sqrt{-4}$　　(3)　$(2+\sqrt{-3})^2$
(4)　$(-1+\sqrt{-2})^2$　　(5)　$\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-5}}$　　*(6)　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

TRIAL B

67　次の式を計算せよ。　→教p.50 補充問題1 (1)，(2)

*(1)　$(2-\sqrt{3}\,i)(2+\sqrt{3}\,i)$　　*(2)　$(\sqrt{-2}+\sqrt{5})(\sqrt{-6}-\sqrt{15})$
*(3)　$(1+i)^3$　　(4)　$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$
*(5)　$\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\,i}$　　(6)　$1+2i+\dfrac{1}{4i}$
(7)　$\dfrac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-i}$　　(8)　$\dfrac{2+\sqrt{-3}}{2-\sqrt{-3}}$