56 $2x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2x+y \geqq 2\sqrt{2x\cdot y}=2\sqrt{2\cdot 4}=4\sqrt{2}$$

よって　$2x+y\geqq 4\sqrt{2}$

等号が成り立つのは，$x>0$，$y>0$，$xy=4$，$2x=y$ から

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$

のときである。

したがって

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$ のとき　最小値 $4\sqrt{2}$

別解　$(2x+y)^2=(2x-y)^2+8xy=(2x-y)^2+32$

よって，$(2x+y)^2$ は $2x=y$ のとき，最小値 32 をとる。

$2x+y>0$ であるから，このとき $2x+y$ も最小となり，最小値は　$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

また，このとき，

$x>0$，$y>0$，$xy=4$，$2x=y$

から

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$

したがって

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$ のとき　最小値 $4\sqrt{2}$

57 $x>0$，$\frac{4}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$$

よって　$x+\frac{4}{x}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\frac{4}{x}$，

すなわち $x=2$ のときである。

したがって　$x=2$ のとき　最小値 4

58 (1) $(ab+bc)-(b^2+ca)=ab+bc-b^2-ca$

$=(b-c)a-b(b-c)$

$=(b-c)(a-b)$

$a>b\geqq c>0$ より，$b-c\geqq 0$，$a-b>0$ であるから

$(b-c)(a-b)\geqq 0$

したがって　$ab+bc\geqq b^2+ca$

よって，□ に入るのは　$\geqq$

(2) $(a^2+2bc)-(2ab+ca)=a^2+2bc-2ab-ca$

$=2(c-a)b-a(c-a)$

$=(c-a)(2b-a)$

$a>b\geqq c>0$ より　$c-a<0$

ここで　$a=3$，$b=2$ のとき　$2b-a=1>0$

$a=3$，$b=1$ のとき　$2b-a=-1<0$

ゆえに，$2b-a$ は正負両方の値をとるから，

$(a^2+2bc)-(2ab+ca)$ は正負両方の値をとる。

よって　×

(3) $(b^2+c^2)-(a^2+2bc)=b^2+c^2-a^2-2bc$

$=(b^2-2bc+c^2)-a^2$

$=(b-c)^2-a^2$

$=(b-c+a)(b-c-a)$

$a>b\geqq c>0$ より $b-c\geqq 0$，$a>0$ であるから

$b-c+a>0$

$a>b\geqq c>0$ より $b-a<0$，$-c<0$ であるから

$b-c-a=(b-a)-c<0$

したがって　$(b-c+a)(b-c-a)<0$

すなわち　$b^2+c^2<a^2+2bc$

よって，□ に入るのは　$<$

59 (1) 実部 2，虚部 3

(2) $-3-i=-3+(-1)i$ であるから

実部 -3，虚部 -1

(3) $\pi i=0+\pi i$ であるから　実部 0，虚部 π

(4) $\frac{2-\sqrt{5}i}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i$ であるから

実部 $\frac{2}{3}$，虚部 $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

60 (1) x，y は実数であるから　$x=3$，$y=4$

(2) x，y が実数であるから，$x-3$，$y+1$ は実数である。

$x-3=0$，$y+1=0$

これを解いて　$x=3$，$y=-1$

(3) x，y が実数であるから，$x+3y$，$2x-y$ は実数である。

$x+3y=9$，$2x-y=4$

これを解いて　$x=3$，$y=2$

(4) x，y が実数であるから，$x-y$，$x-2y$ は実数である。

$x-y=2$，$x-2y=-1$

これを解いて　$x=5$，$y=3$

61 (1) (与式)$=(4+3)+(2+1)i=7+3i$

(2) (与式)$=(3+2)+(-2-1)i=5-3i$

(3) (与式)$=(2-3)+(3-1)i=-1+2i$

(4) (与式)$=(3-1)+\{-1-(-1)\}i=2+0i=2$

(5) (与式)$=3+(1+4)i=3+5i$

(6) (与式)$=(6-9)i=-3i$

62 (1) (与式)$=2+i+6i+3i^2$

$=2+i+6i+3(-1)$

$=(2-3)+(1+6)i$

$=-1+7i$

(2) (与式)$=5+2i-10i-4i^2$

$=5+2i-10i-4(-1)$

$=(5+4)+(2-10)i$

$=9-8i$

(3) (与式)$=9-12i+4i^2=9-12i+4(-1)$

$=(9-4)-12i=5-12i$

(4) (与式)$=1+2i+i^2=1+2i+(-1)$

$=(1-1)+2i=2i$

(5) (与式)$=2^2-i^2=4-(-1)=5$

(6) (与式)$=4^2-(3i)^2=16-9i^2$

$=16-9\cdot(-1)=25$

63 (1) $5-4i$

(2) $3+2i$

(3) $\sqrt{3}$

(4) $5i$

(5) $\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}$

(6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

64 (1) (与式)$=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{3-6i+i-2i^2}{1^2+2^2}$

$=\frac{5-5i}{5}=1-i$

(2) (与式)$=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-4i+i^2}{2^2+1^2}$

$=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

(3) (与式)$=\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{6i+2i^2}{3^2+1^2}$

$=\frac{-2+6i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

(4) (与式)$=\frac{i}{2i^2}=\frac{i}{-2}=-\frac{1}{2}i$

(5) (与式)$=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i+2i+i^2}{2^2+1^2}$

$=\frac{5+5i}{5}=1+i$

(6) (与式)$=\frac{(4-5i)i}{i^2}=\frac{4i-5i^2}{-1}=-5-4i$

65 (1) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$

(3) $2+\sqrt{-5}=2+\sqrt{5}i$

(4) $-\sqrt{-7}=-\sqrt{7}i$

(5) $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$

(6) $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm 2\sqrt{2}i$

66 (1) (与式)$=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$

(2) (与式)$=-\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-2\sqrt{3}i^2=2\sqrt{3}$

(3) (与式)$=(2+\sqrt{3}i)^2=4+4\sqrt{3}i+3i^2$

$=1+4\sqrt{3}i$

(4) (与式)$=(-1+\sqrt{2}i)^2=1-2\sqrt{2}i+2i^2$

$=-1-2\sqrt{2}i$

(5) (与式)$=\frac{\sqrt{25}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{5}$

(6) (与式)$=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}=\sqrt{\frac{6}{2}}\cdot\frac{1}{i}=\sqrt{3}\cdot\frac{i}{i^2}$

$=\sqrt{3}\cdot\frac{i}{-1}=-\sqrt{3}i$

67 (1) (与式)$=2^2-(\sqrt{3}i)^2=4-3i^2=7$

(2) (与式)$=(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{6}i-\sqrt{15})$

$=\sqrt{3}(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{2}i-\sqrt{5})$

$=\sqrt{3}\{(\sqrt{2}i)^2-(\sqrt{5})^2\}$

$=\sqrt{3}(2i^2-5)=-7\sqrt{3}$

(3) (与式)$=1^3+3\cdot 1^2\cdot i+3\cdot 1\cdot i^2+i^3$

$=1+3i+3i^2+i^2 i$

$=(1-3)+(3-1)i$

$=-2+2i$

(4) (与式)$=\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1-2i+i^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

(5) (与式)$=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{4}$

$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(6) (与式)$=1+2i+\frac{i}{4i^2}=1+2i-\frac{1}{4}i=1+\frac{7}{4}i$

(7) (与式)$=\frac{(\sqrt{5}+i)^2}{(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)}=\frac{5+2\sqrt{5}i+i^2}{(\sqrt{5})^2+1^2}$

$=\frac{4+2\sqrt{5}i}{6}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$

(8) (与式)$=\frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}=\frac{(2+\sqrt{3}i)^2}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}$

$=\frac{4+4\sqrt{3}i+3i^2}{2^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{1+4\sqrt{3}i}{7}=\frac{1}{7}+\frac{4\sqrt{3}}{7}i$