$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{ak+bk}{a+b}=\frac{k(a+b)}{a+b}=k$$

$$\frac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}=\frac{p\cdot ak+q\cdot bk+r\cdot ck}{pa+qb+rc}$$

$$=\frac{k(pa+qb+rc)}{pa+qb+rc}=k$$

したがって　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}$

41 $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$ とおくと

$y+z=(b-c)k$,

$z+x=(c-a)k$,

$x+y=(a-b)k$

3つの等式の辺々を加えると

$(y+z)+(z+x)+(x+y)$

$=(b-c)k+(c-a)k+(a-b)k$

両辺を整理すると　$2(x+y+z)=0$

よって　$x+y+z=0$

42 $a>b$, $c>0$ であるから　$ac>bc$

$c>d$, $b>0$ であるから　$bc>bd$

よって　$ac>bd$

43 $\dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x+3y}{4}=\dfrac{1}{12}\{4(x+2y)-3(x+3y)\}$

$=\dfrac{1}{12}(4x+8y-3x-9y)=\dfrac{1}{12}(x-y)$

$x>y$ より $x-y>0$ であるから　$\dfrac{1}{12}(x-y)>0$

よって　$\dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x+3y}{4}>0$

したがって　$\dfrac{x+2y}{3}>\dfrac{x+3y}{4}$

44 (1) $4(x+1)-(-x^2)=x^2+4x+4$

$=(x+2)^2\geqq 0$

したがって　$4(x+1)\geqq -x^2$

等号が成り立つのは，$x=-2$ のときである。

(2) $(a^2+ab+b^2)-3ab=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2\geqq 0$

したがって　$a^2+ab+b^2\geqq 3ab$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

(3) $(x^2+2xy)-(-2y^2)=x^2+2xy+2y^2$

$=(x+y)^2-y^2+2y^2$

$=(x+y)^2+y^2\geqq 0$

したがって　$x^2+2xy\geqq -2y^2$

等号が成り立つのは，$x+y=0$ かつ $y=0$,

すなわち $x=y=0$ のときである。

(4) $(2x^2+3y^2)-4xy=2x^2-4xy+3y^2$

$=2(x-y)^2-2y^2+3y^2$

$=2(x-y)^2+y^2\geqq 0$

したがって　$2x^2+3y^2\geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x=y$ かつ $y=0$,

すなわち $x=y=0$ のときである。

(5) $10x^2-6xy+y^2=10\left(x^2-\dfrac{3}{5}xy\right)+y^2$

$=10\left(x-\dfrac{3}{10}y\right)^2-\dfrac{9}{10}y^2+y^2$

$=10\left(x-\dfrac{3}{10}y\right)^2+\dfrac{1}{10}y^2\geqq 0$

したがって　$10x^2-6xy+y^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x=\dfrac{3}{10}y$ かつ $y=0$,

すなわち $x=y=0$ のときである。

参考 $10x^2-6xy+y^2=x^2+(9x^2-6xy+y^2)$

$=x^2+(3x-y)^2\geqq 0$

と式変形してもよい。

(6) $9x^2-y(6x-y)=9x^2-6xy+y^2$

$=(3x-y)^2\geqq 0$

したがって　$9x^2\geqq y(6x-y)$

等号が成り立つのは，$3x-y=0$,

すなわち $y=3x$ のときである。

45 (1) 両辺の平方の差を考えると

$\{(a+b)\sqrt{ab}\}^2-(2ab)^2$

$=(a+b)^2ab-4a^2b^2$

$=ab\{(a+b)^2-4ab\}$

$=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2\geqq 0$

よって　$\{(a+b)\sqrt{ab}\}^2\geqq (2ab)^2$

$(a+b)\sqrt{ab}>0$, $2ab>0$ であるから

$(a+b)\sqrt{ab}\geqq 2ab$

参考 等号が成り立つのは，$a-b=0$,

すなわち $a=b$ のときである。

(2) 両辺の平方の差を考えると

$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{9a+4b})^2$

$=9a+12\sqrt{ab}+4b-9a-4b=12\sqrt{ab}>0$

よって　$(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2>(\sqrt{9a+4b})^2$

$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0$, $\sqrt{9a+4b}>0$ であるから

$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{9a+4b}$

46 (1) $2a>0$, $\dfrac{3}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{3}{a}}=2\sqrt{6}$

よって　$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{6}$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $2a=\dfrac{3}{a}$,

すなわち $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときである。

(2) $9ab>0$, $\dfrac{1}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$9ab+\dfrac{1}{ab}\geqq 2\sqrt{9ab\cdot\dfrac{1}{ab}}=2\cdot 3=6$

よって　$9ab+\dfrac{1}{ab}\geqq 6$

等号が成り立つのは，

$a>0$, $b>0$ かつ $9ab=\dfrac{1}{ab}$,

すなわち $ab=\dfrac{1}{3}$ のときである。

(3) $a+b>0$, $\dfrac{1}{a+b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$a+b+\dfrac{1}{a+b}\geqq 2\sqrt{(a+b)\cdot\dfrac{1}{a+b}}=2$

よって　$a+b+\dfrac{1}{a+b}\geqq 2$

等号が成り立つのは，

$a>0$, $b>0$ かつ $a+b=\dfrac{1}{a+b}$,

すなわち $a+b=1$ のときである。

47 **指針** 2つの式 A, B の大小は $A-B$ の符号で調べる。本問では，$A-B$ を因数分解して各因数の符号を調べる。

2つの因数 X, Y について

X と Y が同符号 $\Longrightarrow XY>0$

X と Y が異符号 $\Longrightarrow XY<0$

$(ab+cd)-(ac+bd)=ab+cd-ac-bd$

$=a(b-c)-d(b-c)$

$=(a-d)(b-c)$

$a>b>c>d$ より $a-d>0$, $b-c>0$ であるから　$(a-d)(b-c)>0$

よって　$(ab+cd)-(ac+bd)>0$

したがって　$ab+cd>ac+bd$

48 $(xy-3)-(3y-x)=xy+x-3y-3$

$=x(y+1)-3(y+1)$

$=(x-3)(y+1)$

$x>3$, $y>-1$ より，$x-3>0$, $y+1>0$ であるから

$(x-3)(y+1)>0$

よって　$(xy-3)-(3y-x)>0$

したがって　$xy-3>3y-x$

49 (1) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)^2$

$=x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6-x^6-2x^3y^3-y^6$

$=x^2y^2(x^2+y^2-2xy)$

$=x^2y^2(x-y)^2\geqq 0$

よって　$(x^4+y^4)(x^2+y^2)\geqq (x^3+y^3)^2$

等号が成り立つのは，$xy=0$ または $x-y=0$,

すなわち $x=0$ または $y=0$ または $x=y$ のときである。

(2) $(x^4+y^4)-(x^3y+xy^3)$

$=x^4-x^3y-xy^3+y^4$

$=(x-y)x^3-(x-y)y^3$

$=(x-y)(x^3-y^3)$

$=(x-y)\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)^2\left\{\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2\right\}\geqq 0$

よって　$x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

(3) $(x^2+y^2)-2(x+y-1)$

$=x^2-2x+y^2-2y+2$

$=x^2-2x+1+y^2-2y+1$

$=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$

よって　$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

等号が成り立つのは，$x-1=0$ かつ $y-1=0$,

すなわち $x=y=1$ のときである。

(4) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

$=\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{9}-\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{9}$

$=\dfrac{1}{9}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{9}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2$

$+c^2-2ca+a^2)$

56 $2x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$2x+y \geqq 2\sqrt{2x\cdot y}=2\sqrt{2\cdot 4}=4\sqrt{2}$

よって　$2x+y \geqq 4\sqrt{2}$

等号が成り立つのは，$x>0$，$y>0$，$xy=4$，$2x=y$ から

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$

のときである。

したがって

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$ のとき 最小値 $4\sqrt{2}$

別解 $(2x+y)^2=(2x-y)^2+8xy=(2x-y)^2+32$

よって，$(2x+y)^2$ は $2x=y$ のとき，最小値 32 をとる。

$2x+y>0$ であるから，このとき $2x+y$ も最小となり，最小値は $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

また，このとき，

$x>0$，$y>0$，$xy=4$，$2x=y$

から

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$

したがって

$x=\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$ のとき 最小値 $4\sqrt{2}$

57 $x>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$$

よって　$x+\dfrac{4}{x} \geqq 4$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\dfrac{4}{x}$，

すなわち $x=2$ のときである。

したがって　$x=2$ のとき 最小値 4

58 (1) $(ab+bc)-(b^2+ca)=ab+bc-b^2-ca$

$=(b-c)a-b(b-c)$

$=(b-c)(a-b)$

$a>b \geqq c>0$ より，$b-c \geqq 0$，$a-b>0$ であるから

$(b-c)(a-b) \geqq 0$

したがって　$ab+bc \geqq b^2+ca$

よって，□に入るのは　$\geqq$

(2) $(a^2+2bc)-(2ab+ca)=a^2+2bc-2ab-ca$

$=2(c-a)b-a(c-a)$

$=(c-a)(2b-a)$

$a>b \geqq c>0$ より　$c-a<0$

ここで　$a=3$，$b=2$ のとき　$2b-a=1>0$

$a=3$，$b=1$ のとき　$2b-a=-1<0$

ゆえに，$2b-a$ は正負両方の値をとるから，

$(a^2+2bc)-(2ab+ca)$ は正負両方の値をとる。

よって　×

(3) $(b^2+c^2)-(a^2+2bc)=b^2+c^2-a^2-2bc$

$=(b^2-2bc+c^2)-a^2$

$=(b-c)^2-a^2$

$=(b-c+a)(b-c-a)$

$a>b \geqq c>0$ より $b-c \geqq 0$，$a>0$ であるから

$b-c+a>0$

$a>b \geqq c>0$ より $b-a<0$，$-c<0$ であるから

$b-c-a=(b-a)-c<0$

したがって　$(b-c+a)(b-c-a)<0$

すなわち　$b^2+c^2<a^2+2bc$

よって，□に入るのは　<

59 (1) 実部 2，虚部 3

(2) $-3-i=-3+(-1)i$ であるから

実部 -3，虚部 -1

(3) $\pi i=0+\pi i$ であるから　実部 0，虚部 π

(4) $\dfrac{2-\sqrt{5}i}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}i$ であるから

実部 $\dfrac{2}{3}$，虚部 $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

60 (1) x，y は実数であるから　$x=3$，$y=4$

(2) x，y が実数であるから，$x-3$，$y+1$ は実数である。

$x-3=0$，$y+1=0$

これを解いて　$x=3$，$y=-1$

(3) x，y が実数であるから，$x+3y$，$2x-y$ は実数である。

$x+3y=9$，$2x-y=4$

これを解いて　$x=3$，$y=2$

(4) x，y が実数であるから，$x-y$，$x-2y$ は実数である。

$x-y=2$，$x-2y=-1$

これを解いて　$x=5$，$y=3$

61 (1) (与式)$=(4+3)+(2+1)i=7+3i$

(2) (与式)$=(3+2)+(-2-1)i=5-3i$

(3) (与式)$=(2-3)+(3-1)i=-1+2i$

(4) (与式)$=(3-1)+\{-1-(-1)\}i=2+0i=2$

(5) (与式)$=3+(1+4)i=3+5i$

(6) (与式)$=(6-9)i=-3i$

62 (1) (与式)$=2+i+6i+3i^2$

$=2+i+6i+3(-1)$

$=(2-3)+(1+6)i$

$=-1+7i$

(2) (与式)$=5+2i-10i-4i^2$

$=5+2i-10i-4(-1)$

$=(5+4)+(2-10)i$

$=9-8i$

(3) (与式)$=9-12i+4i^2=9-12i+4(-1)$

$=(9-4)-12i=5-12i$

(4) (与式)$=1+2i+i^2=1+2i+(-1)$

$=(1-1)+2i=2i$

(5) (与式)$=2^2-i^2=4-(-1)=5$

(6) (与式)$=4^2-(3i)^2=16-9i^2$

$=16-9\cdot(-1)=25$

63 (1) $5-4i$

(2) $3+2i$

(3) $\sqrt{3}$

(4) $5i$

(5) $\dfrac{-1-\sqrt{5}i}{2}$

(6) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

64 (1) (与式)$=\dfrac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{3-6i+i-2i^2}{1^2+2^2}$

$=\dfrac{5-5i}{5}=1-i$

(2) (与式)$=\dfrac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4-4i+i^2}{2^2+1^2}$

$=\dfrac{3-4i}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

(3) (与式)$=\dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{6i+2i^2}{3^2+1^2}$

$=\dfrac{-2+6i}{10}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

(4) (与式)$=\dfrac{i}{2i^2}=\dfrac{i}{-2}=-\dfrac{1}{2}i$

(5) (与式)$=\dfrac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+3i+2i+i^2}{2^2+1^2}$

$=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

(6) (与式)$=\dfrac{(4-5i)i}{i^2}=\dfrac{4i-5i^2}{-1}=-5-4i$

65 (1) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$

(3) $2+\sqrt{-5}=2+\sqrt{5}i$

(4) $-\sqrt{-7}=-\sqrt{7}i$

(5) $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$

(6) $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm 2\sqrt{2}i$

66 (1) (与式)$=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$

(2) (与式)$=-\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-2\sqrt{3}i^2=2\sqrt{3}$

(3) (与式)$=(2+\sqrt{3}i)^2=4+4\sqrt{3}i+3i^2$

$=1+4\sqrt{3}i$

(4) (与式)$=(-1+\sqrt{2}i)^2=1-2\sqrt{2}i+2i^2$

$=-1-2\sqrt{2}i$

(5) (与式)$=\dfrac{\sqrt{25}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{5}$

(6) (与式)$=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}\cdot\dfrac{1}{i}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{i}{i^2}$

$=\sqrt{3}\cdot\dfrac{i}{-1}=-\sqrt{3}i$

67 (1) (与式)$=2^2-(\sqrt{3}i)^2=4-3i^2=7$

(2) (与式)$=(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{6}i-\sqrt{15})$

$=\sqrt{3}(\sqrt{2}i+\sqrt{5})(\sqrt{2}i-\sqrt{5})$

$=\sqrt{3}\{(\sqrt{2}i)^2-(\sqrt{5})^2\}$

$=\sqrt{3}(2i^2-5)=-7\sqrt{3}$

(3) (与式)$=1^3+3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2+i^3$

$=1+3i+3i^2+i^2 i$

$=(1-3)+(3-1)i$

$=-2+2i$

(4) (与式)$=\dfrac{(1-i)^2}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{1-2i+i^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

(5) (与式)$=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{4}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(6) (与式)$=1+2i+\dfrac{i}{4i^2}=1+2i-\dfrac{1}{4}i=1+\dfrac{7}{4}$

(7) (与式)$=\dfrac{(\sqrt{5}+i)^2}{(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)}=\dfrac{5+2\sqrt{5}i+}{(\sqrt{5})^2+1^2}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{5}i}{6}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}i$

(8) (与式)$=\dfrac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}=\dfrac{(2+\sqrt{3}i)^2}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{4+4\sqrt{3}i+3i^2}{2^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{1+4\sqrt{3}i}{7}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}i$