例題5

与えられた式より

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1) - 1 \quad \leftarrow \text{nにn+1を代入}$$
$$= 3a_{n+1} + 2n + 1$$

この式と与えられた式より

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + \cancel{2n} + 1 \\ -)\ a_{n+1} &= 3a_n + \cancel{2n} - 1 \\ \hline a_{n+2} - a_{n+1} &= 3(a_{n+1} - a_n) + 2 \end{aligned}$$

Point

$$a_{n+1} = \underbrace{3}_{\text{倍}}a_n + \underbrace{2n-1}_{\text{nの式}}$$

等比と階差が組み合わさった複雑な式

工夫する

$\boxed{\text{n+1のときの式とnのときの式を引くことで「2n」が消える}}$

ここで $a_{n+1} - a_n = b_n$ とすると ……①

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \quad \leftarrow \text{2項間漸化式}$$

$$b_{n+1} + 1 = \underset{\text{公比}}{3}(b_n + 1) \quad \leftarrow \text{等比型}$$

$\alpha = 3\alpha + 2$

$\alpha = -1$

よって

$$b_n + 1 = (b_1 + 1)\cdot 3^{n-1}$$

初項 × 公比$^{n-1}$

n+1のときの式とnの式を引いて考えているので階差が出てくる。

ここで①より $b_1 = a_2 - a_1$

与式より $a_2 = 3a_1 + 2\cdot 1 - 1$ ← nに1を代入

$= 3 + 2 - 1$

$= 4$

よって $b_1 = 4 - 1 = 3$.

これより

$$b_n + 1 = 4\cdot 3^{n-1}$$
$$b_n = 4\cdot 3^{n-1} - 1$$

①より

$$a_{n+1} - a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 1$$ となるので ← 階差型 $a_{n+1} = a_n + \underbrace{4\cdot 3^{n-1} - 1}_{\text{nの式}}$

$n \geq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot 3^{k-1} - 1)$$

初項4, 公比3, 項数n-1の等比数列の和

$$= 1 + \frac{4\cdot(1-3^{n-1})}{1-3} - (n-1)$$
$$= 1 - 2(1 - 3^{n-1}) - n + 1$$
$$= 1 - 2 + 2\cdot 3^{n-1} - n + 1$$
$$= 2\cdot 3^{n-1} - n$$

$n = 1$のとき

$2\cdot 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ より成り立つ。

以上より

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1} - n$$

例題6

$$n a_{n+1} = (n+2)a_n + n$$

両辺を$(n+2)(n+1)n$で割ると

$$\frac{\cancel{n} a_{n+1}}{(n+2)(n+1)\cancel{n}} = \frac{\cancel{(n+2)} a_n}{\cancel{(n+2)}(n+1)n} + \frac{\cancel{n}}{(n+2)(n+1)\cancel{n}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{a_n}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

ここで $\frac{a_n}{(n+1)n} = b_n$ …① とすると.

$$b_{n+1} = b_n + \underbrace{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}_{n\text{の式}}$$ ← 階差型

階差型

Point

a_{n+1}, a_n に n, $(n+2)$ がかけられているので, n, $(n+2)$で割るとそれでは上手く, b_nと置きかえできないので n, $(n+1)$, $(n+2)$で割る.

考え方としては, 都合がわるい部分を「割る」,「かける」,「ひく」などで上手く変形していく.

工夫のしかたは, このプリントを通して, すべて経験します. 一度解いたことで, 色々な問題に対応できるでしょう

よって, $n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k+1)}$$

ここで ①より $b_1 = \frac{a_1}{2\cdot 1} = 1$ なので

$$b_n = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k+1)}}_{\text{部分分数分解}}$$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

注意!

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= 1 + \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} \right)}_{k=1\text{のとき}} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right)}_{k=2\text{のとき}} + \cdots\cdots + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right)}_{k=n-1\text{のとき}} \right\}.$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1) + (n+1) - 2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$n=1$のとき $\frac{3\cdot 1+1}{2\cdot(1+1)} = \frac{4}{4} = 1$

よって $b_n = \frac{3n+1}{2(n+1)}$

①より $\frac{a_n}{(n+1)\cdot n} = \frac{3n+1}{2(n+1)}$ → $a_n = \frac{(3n+1)\cdot n}{2}$

例題7

3項間漸化式です。基本的な考え方を理解し、解法が3つのパターンに分けられるので、それぞれの流れを理解しよう。

(1) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ は

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ と変形できる

ここで、$a_{n+1}-a_n=b_n$ …① とすると

$b_{n+1}=2b_n$ ← 等比型

よって $b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$

①より $b_1=a_2-a_1=2$ なので

$b_n=2^n$ となる

①より

$a_{n+1}-a_n=2^n$ ← 階差型

$(a_{n+1}=a_n+2^n)$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}2^k}_{\text{初項2、公比2、項数}n-1\text{の等比数列の和}}$ ← $2\cdot 2^{k-1}$

$=3+\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}$

$=3-2+2\cdot 2^{n-1}$

$=2^n+1$

$n=1$ のとき $2^1+1=3$ より成り立つ

よって

$a_n=2^n+1$

なぜこの様に変形できるかというと

与えられた式を

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(\underbrace{a_{n+1}-\alpha a_n}_{①})$

と変形できれば、

$a_{n+1}-\alpha a_n=b_n$ と置き換えることで

$b_{n+1}=\beta b_n$ となり解ける

では、

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

となる。与式は

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

となるので、$\alpha+\beta=3$、$\alpha\beta=2$ となる α,β を考えればよい。

解と係数の関係

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2,1$

つまり $\alpha=1,\beta=2$

または

$\alpha=2,\beta=1$ となる

$\alpha=1,\beta=2$ のとき ①より

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

と変形できる。

また、$\alpha=2,\beta=1$ から

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$

と変形できるが、今回は上の式だけで解ける問題パターンです

この式は、与式

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

この式を

$x^2-3x+2=0$

としたものと考えてよい

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ は

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$ …① $\alpha=3,\beta=-2$

又は

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$ …② $\alpha=-2,\beta=3$

と変形できる

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ に変形したい

与式 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ より

$a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$ となる

ここで $x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3,-2$

①より

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$

ここで $a_{n+1}-3a_n=b_n$ …③ とすると

$b_{n+1}=-2b_n$ ←等比型

$b_n=b_1\times(-2)^{n-1}$

③より $b_1=a_2-3a_1=1$ なので

$b_n=(-2)^{n-1}$

よって、③より

$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1}$ …①′

②より

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$

ここで $a_{n+1}+2a_n=c_n$ …④ とすると.

$c_{n+1}=3c_n$ ←等比型

$c_n=c_1\times 3^{n-1}$

④より $c_1=a_2+2a_1=1$ なので

$c_n=3^{n-1}$

よって ④より

$a_{n+1}+2a_n=3^{n-1}$ …②′

①′②′より

$$
\begin{array}{rl}
a_{n+1}+2a_n &= 3^{n-1} \\
-)\ a_{n+1}-3a_n &= (-2)^{n-1} \\
\hline
5a_n &= 3^{n-1}-(-2)^{n-1}
\end{array}
$$

$$a_n=\frac{3^{n-1}-(-2)^{n-1}}{5}$$

補足) (1)は、1本の変形式しか使わなかったが

(2)では 2本の変形式を使って、①′, ②′のような2本の式を求めて、

連立方程式で解を出します.

(1)と(2)の違いは、αとβに1があるかどうかです.

1があるときは、(1)で 1本の式で階差型をつくれます

1がない 2つの数のときは (2)で2本の式から解きます.

(3) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ は

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$ …①
と変形できる　$\alpha=2, \beta=2$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-a_n)$ に変形したい
与式 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$
ここで $x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$
$x=2$

ここで $a_{n+1}-2a_n=b_n$ …② とすると

$b_{n+1}=2b_n$ ← 等比型

$b_n=b_1\times 2^{n-1}$

②より $b_1=a_2-2a_1=2$ なので

$b_n=2^n$

補足) (1)(2)と違って $\alpha=\beta=2$ しかないので
1本の変形式しかできないが、その式を
解くことで例題3の型の式ができる

よって、③より

$a_{n+1}-2a_n=2^n$

これより

$a_{n+1}=2a_n+2^n$ ← 例題3の型

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{\cancel{2}\cdot a_n}{\cancel{2}\cdot 2^n}+\frac{\cancel{2^n}}{2\cdot\cancel{2^n}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで $\frac{a_n}{2^n}=c_n$ …③ とすると

$c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}$ ← 等差型

$c_n=c_1+(n-1)\times\frac{1}{2}$

③より $c_1=\frac{a_1}{2}=0$ なので

$c_n=\frac{1}{2}(n-1)$

よって③より

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$$

補足) (1)は、α, β に1を含む場合
(2)は　α, β に1を含まない2数の場合、
(3)は　$\alpha=\beta$ となる場合

例題8

数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$が組み合わさった問題です。センターや模試などで誘導つきで出題されることが多いです。

(1) 与式より

$$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$$ ← この形に変形できれば置き換えで $C_{n+1}=\beta C_n$ とできる。

$$3a_n+b_n+\alpha(a_n+3b_n)=\beta a_n+\alpha\beta b_n$$

$$(\alpha+3)a_n+(3\alpha+1)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$$

これより

$$\begin{cases}\alpha+3=\beta\\3\alpha+1=\alpha\beta\end{cases}$$

補足）入試では数列$\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$を求めよ という誘導で(2)の式を導くというのが多いです。

よって $3\alpha+1=\alpha(\alpha+3)$

$$3\alpha+1=\alpha^2+3\alpha$$

$$\alpha^2=1$$

$$\alpha=\pm1$$

よって $\alpha=1$のとき $\beta=4$

$\alpha=-1$のとき $\beta=2$

(2) (1)より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\underbrace{4}_{公比}(a_n+b_n)$$ ← 等比型

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\underbrace{2}_{公比}(a_n-b_n)$$ ← 等比型

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\times4^{n-1}=5\cdot4^{n-1}$$

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\times2^{n-1}=3\cdot2^{n-1}$$

↑ 慣れてきたら、置き換えをせずにこのように解いていこう。

これより

$$\begin{aligned}&a_n+b_n=5\cdot4^{n-1}\\+)\ &a_n-b_n=3\cdot2^{n-1}\\\hline&2a_n=5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1}\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1}}{2}$$

$$\begin{aligned}&a_n+b_n=5\cdot4^{n-1}\\-)\ &a_n-b_n=3\cdot2^{n-1}\\\hline&2b_n=5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1}\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}{2}$$

以上より

$$a_n=\frac{5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1}}{2}$$

$$b_n=\frac{5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}{2}$$