No. 数II

Date

教P20〜27 練習問題 解答

練習19

(1) $(x+1)(x-1)=x^2-x+x-1=x^2-1$.

よって これは x についての恒等式である. //

(2) 例えば $x=1$ とすると.

左辺 $=1\cdot(1-1)+1=0+1=1$.

右辺 $=2\cdot1=2$.

よって 与えられた等式は恒等式でない. //

(3) 例えば $x=1$ とすると

左辺 $=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. 右辺 $=\frac{3}{2}$

よって 与えられた等式は恒等式でない. //

(4) $$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2}{x(x+2)}-\frac{x}{x(x+2)}$$ ← 通分

$$=\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}.$$

よって これは x についての恒等式である. //

Point
恒等式は展開.因数分解
平方完成. 通分.約分などで
左(右)辺から右(左)辺へ
変形できる.

Point
恒等式でないものは
左辺と右辺が異なる数値に
なるようなものを1つでも
考えればよい

練習20

等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2-7x+8=ax^2+(-3a+b)x+(-3b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$2=a,\quad -3a+b=-7,\quad -3b+c=8$$

これを解いて $a=2$, $b=-1$, $c=5$. //

Point
恒等式の性質
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$
が x についての恒等式
$\Leftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

No.

Date

練習21

等式の右辺を通分して x について整理すると

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

両辺に $x(x+1)$ をかけて得られる等式

$$1 = (a+b)x + a$$

が恒等式であればよい。両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0 = a+b,\quad 1 = a$$

これを解いて $a=1,\ b=-1$. //

練習22

(1) 右辺 $= (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (3a^2b - 3ab^2)$

$= a^3 - b^3 =$ 左辺 //

(2) 右辺 $= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$

$= a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2$

$= a^2 - ab + b^2 =$ 左辺 //

(3) 左辺 $= (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

右辺 $= 1 + x + x(1+x) + x(1+x)^2$

$= 1 + x + (x + x^2) + x(1 + 2x + x^2)$

$= 1 + x + x + x^2 + x + 2x^2 + x^3$

$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

よって $(1+x)^3 = 1 + x + x(1+x) + x(1+x)^2$ //

Point

分数式が恒等式であることを考えるには、通分して分子の係数比較を考えることと同じなので、分母をはらって調べている!

参考!

← により

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

となる。左辺から右辺へ今までとは逆の式変形ができたことになる。この式変形を部分分数分解という。

← 証明するだけなら右辺から左辺へ変形すればよい。左辺から右辺へ逆に変形もできる。実は平方完成だよね。

← (3)のように左辺から右辺への変形が難しいときは左辺・右辺を単独で変形して同じ形になることにより証明すればよい。(P23. A=Bの証明 2)

No.

Date . .

練習23

左辺 $= a^2+bc = a^2+b(a+b) = a^2+ab+b^2$

右辺 $= b^2+ca = b^2+(a+b)a = a^2+ab+b^2$

よって $a+b=c$ のとき $a^2+bc=b^2+ca$ //

〈別解〉

(左辺)−(右辺)

$= a^2+bc-(b^2+ca)$

$= a^2+b(a+b)-b^2-(a+b)a$

$= a^2+ab+b^2-b^2-ab-a^2$

$= 0.$

よって $a+b=c$ のとき

$a^2+bc=b^2+ca.$ //

練習24

(1) $a+b+c=0$ より $c=-(a+b)$

左辺 $= a^2+ca = a^2-(a+b)a = a^2-a^2-ab = -ab$

右辺 $= b^2+bc = b^2-b(a+b) = b^2-ab-b^2 = -ab$

よって $a+b+c=0$ のとき $a^2+ca=b^2+bc.$ //

(2) $a+b+c=0$ より

$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$

よって $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

$= ab(-c)+bc(-a)+ca(-b)+3abc$

$= -abc-abc-abc+3abc$

$= 0$ //

← 与えられた条件式は式変形はある程度自由に使える。「使い方がコレしかない!」というわけではは必ずしもないので注意しましょう。

練習25

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=3$ より $a=3b,\ c=3d.$

よって

$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{3b-3d}{b-d}=\dfrac{3\cancel{(b-d)}}{\cancel{b-d}}=3$ //

Point

分数=分数 のような条件式はさらに「$=k$」とおくとうまく処理できる!

練25, 26のパターン

※練25では k として $k=3$ のときを考えている。

No.

Date

練習26

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk,\ c=dk.$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{\cancel{(b+d)}k}{\cancel{b+d}}=k.$$

$$\frac{2a-3c}{2b-3d}=\frac{2bk-3dk}{2b-3d}=\frac{\cancel{(2b-3d)}k}{\cancel{2b-3d}}=k.$$

よって

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}\ //$$

(2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk.\ c=dk.$

$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{(bk)^2+(dk)^2}{b^2+d^2}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2}$$

$$=\frac{\cancel{(b^2+d^2)}k^2}{\cancel{b^2+d^2}}=k^2.$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{(bk)^2}{b^2}=\frac{\cancel{b^2}k^2}{\cancel{b^2}}=k^2.$$

よって

$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{a^2}{b^2}\ //$$

Point

ここでも
左辺、右辺を単独で変形
していき、同じ式が導ける
方法で示そう。
左辺 ⟶ 右辺 や
左辺 − 右辺 を計算する
方法もできなくはないが…

No.

Date . .

練習27

$(3x-4y)-(2x-3y)=3x-4y-2x+3y$

$=x-y$

$x>y$ より $x-y>0$ であるから

$(3x-4y)-(2x-3y)>0$

したがって $3x-4y>2x-3y$. //

Point

A > B の証明

↓

A − B > 0 を示せばよい!

練習28

$(xy+6)-(3x+2y)=xy-3x-2y+6$

$=x(y-3)-2(y-3)$

$=(x-2)(y-3)$

$x>2$, $y>3$ より $x-2>0$, $y-3>0$ であるから

$(x-2)(y-3)>0$ ← (正)×(正)=(正)>0

すなわち $(xy+6)-(3x+2y)>0$

したがって $xy+6>3x+2y$. //