

練習29

$$(1) \quad (\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (x^2 + 4y^2) - 4xy = x^2 - 4xy + 4y^2 \\ = (x - 2y)^2 \geq 0$$

∴ $x^2 + 4y^2 \geq 4xy$ が成り立つ。

この不等式で等号が成り立つのは $x - 2y = 0$ すなわち

$x = 2y$ のときである。 //

$$(2) \quad (\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (x + y)^2 - 4xy \\ = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$$

∴ $(x + y)^2 \geq 4xy$ が成り立つ。

この不等式で等号が成り立つのは $x - y = 0$ すなわち

$x = y$ のときである。 //

Point

実数 a について、 $a^2 \geq 0$

等号が成り立つのは $a = 0$ のとき

練習30

$$(1) \quad (\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (a^2 + 2b^2) - 2ab \\ = a^2 - 2ab + 2b^2 \\ = a^2 - 2ab + b^2 - b^2 + 2b^2 \quad \text{平方完成} \\ = (a - b)^2 - b^2 + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2 \geq 0$$

∴ $a^2 + 2b^2 \geq 2ab$ が成り立つ。

この不等式で等号が成り立つのは $a - b = 0$ かつ $b = 0$

すなわち $a = b = 0$ のときである。 //

$$(2) \quad a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

∴ $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ が成り立つ。

この不等式で等号が成り立つのは $a - \frac{b}{2} = 0$ かつ $b = 0$

すなわち $a = b = 0$ のときである。 //

Point

実数 a, b について

$$a^2 + b^2 \geq 0$$

等号が成り立つのは

$$a = b = 0 \text{ のとき}$$

← $b = 0$ のところは正確には

$\frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$ としておくところだが。

この式から $b = 0$ はすぐ導けるので

解答のようにした。

練習31

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (1+x)^2 - (\sqrt{1+2x})^2 \\ &= 1+2x+x^2 - (1+2x) = x^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$$

$1+x > 0, \sqrt{1+2x} > 0$ であるから

$$1+x > \sqrt{1+2x} \text{ が成り立つ. //$$

<別解> それほど変わらないが...

$x > 0$ のとき $1+x > 0, \sqrt{1+2x} > 0$ であるから

$$(1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2 \text{ を示せばよい.}$$

$$(1+x)^2 - (\sqrt{1+2x})^2 = 1+2x+x^2 - (1+2x) = x^2 > 0$$

$$\therefore (1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$$

$$\text{ゆえに } 1+x > \sqrt{1+2x} \text{. //$$

Point

$\sqrt{\quad}$ のついた不等式の証明は
2乗してから証明!

② 解答の3行目から5行目の
式への証明の流れは

「 $a > 0, b > 0$ のとき

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$$

を用いている。そのため

を省略することは絶対にでき

ない! は解答の書き出し

1行目にかいておいてもよい。

練習32

$$(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 = (|a|+2|b|)^2 - |a+2b|^2$$

$$= |a|^2 + 4|a||b| + 4|b|^2 - (a+2b)^2$$

$$= a^2 + 4|ab| + 4b^2 - (a^2 + 4ab + 4b^2)$$

$$= 4|ab| - 4ab = 4(|ab| - ab) \geq 0$$

$$\therefore (|a|+2|b|)^2 \geq |a+2b|^2$$

$|a|+2|b| \geq 0, |a+2b| \geq 0$ であるから

$$|a|+2|b| \geq |a+2b| \text{ が成り立つ.}$$

この不等式で等号が成り立つのは、 $|ab| = ab$

すなわち $ab \geq 0$ のときである. //

Point

絶対値のついた不等式の
証明も2乗してから証明!

← 練習31と同様に、2乗して

証明した場合の省略

は NG!

練習33

- (1) $a > 0$ より $\frac{4}{a} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

が成り立つ。この不等式で等号が成り立つのは $a = \frac{4}{a}$

すなわち $a^2 = 4$ のとき、 $a > 0$ であるから $a = 2$ のとき。//

- (2) $a > 0, b > 0$ より $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ であるから

相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{1} = 2$$

が成り立つ。この不等式で等号が成り立つのは $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$

すなわち $a^2 = b^2$ のとき、 $a > 0, b > 0$ であるから $a = b$ のとき。//

←「相加・相乗平均の大小より」と省略の意味でもいいが、公式を使ったところ は省略NG!

← $a^2 = 4$ を解くと $a = \pm 2$ であるが $a = -2$ は $a > 0$ を満たさないの除外。

← $a^2 = b^2$ を解くと $a = \pm b$ であるが、 $b > 0$ なので $a = -b$ は $a > 0$ を満たさないの除外。

練習1

- (1) 実部 -3 、虚部 5 (2) 実部 $-\frac{1}{2}$ 、虚部 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- (3) 実部 1 、虚部 0 (4) 実部 0 、虚部 -1

- ← (3) $1 + 0i$
(4) $0 - 1i$

練習2

- (1) $x - 3 = 0$ から $x + y = 0$ より $x = 3, y = -3$ //

- (2) $x - 2y = 4$ から $2x - 3y = 7$ より $x = 2, y = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{array} \right.$$

としてもよい。結局連立方程式を解くことになる。