

6. 円と直線

中2 2直線 $y=2x+1$, $y=-x+7$ の共有点の座標を求めよ

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+7 \end{cases} \quad \text{連立方程式の解}$$

円と直線の共有点の座標 $\rightarrow$ 連立方程式の解

教科書 例題7, Ex.26 はチェックしておきな!

Ans.

Ex.26

(1) $(-4, -3)$, $(3, 4)$ (2) $(1, 1)$

本題はここから!

<円と直線の位置関係>

[1] 判別式から読み解く方法

円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = x + 2$ の共有点

$$x^2 + (x+2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0, -2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$y = 2, 0$$

$(0, 2), (-2, 0)$ の2個

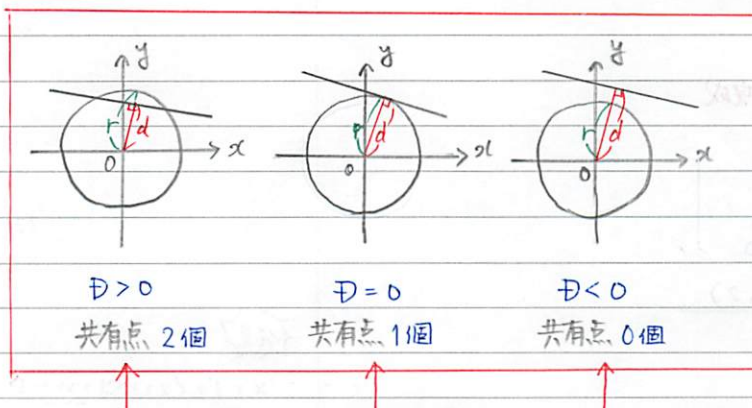
共有点のx座標

二次方程式の解に対応

解の個数は“二次方程式の判別式”からわかる

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 0$$

$$= 1 > 0 \quad \text{よって 2個}$$



円の中から直線までの距離(d)と半径(r)に着目しよう!

$$d < r$$

$$d = r$$

$$d > r$$

(共有点を持つ: $d \leq r$)

② 円の中心と直線の距離から読み解く方法

例. 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = x + 2$ の共有点の個数

↓

円の中心: 点 $(0, 0)$ と直線 $y = x + 2$ ($\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$) の距離 d は

$$d = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

円の半径 $r = 2$ より

$$d < r$$

となるので、共有点は 2個、

使い分け

- ① ... 共有点の座標が、必要な場合と有効
- ② ... 位置関係のみを調べたい場合と有効

⇒ Ex. 27 (②の考え方で解いてみよう)

Level up ♪

応用
例題
3

円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = x + k$ が異なる2点で交わる時、定数 k の値の範囲を求めよ。

「教科書では判別式を使って解法が第1解答となってますが、
この問いだけと考えると、点と直線の距離の考えの方が有効です」

... もちろん、判別式を使っても
何も問題ありません ♪

解) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の中心の座標と半径 r は

点 $(0, 0)$, $r = 1$

この点と直線 $y = x + k$ の距離 d は

$$d = \frac{|0 - 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる2点で交わることから

$$d < r \text{ より}$$

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$|k| < \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

⇒ 問4, Ex. 28

CHART 基例 90

<円の接線の方程式>

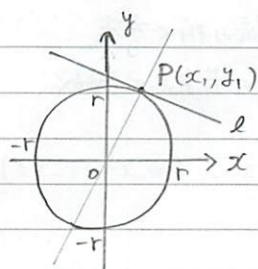
円 $x^2 + y^2 = r^2$, 接点 $P(x_1, y_1)$ (i) P が軸上にあるとき OP の傾き: $\frac{y_1}{x_1}$ より接線 l の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ より $l \perp OP$

$$l: y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$x_1 x + y_1 y = \frac{x_1^2 + y_1^2}{r^2}$$

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

点 (x_1, y_1) は円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点。
だから $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ (ii) P が x 軸上にあるとき接線は点 P を通り x 軸に垂直な直線なので

$$x = r \quad \text{または} \quad x = -r$$

(iii) P が y 軸上にあるとき接線は点 P を通り y 軸に垂直な直線なので

$$y = r \quad \text{または} \quad y = -r$$

↓

円の接線

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

接点 P が M ならば
求めらる。例. 円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めよ。

$$4x - 3y = 25$$

⇒ Ex. 30

公式 $x_1 x + y_1 y = \frac{r^2}{1}$ に代入
 $\frac{4}{1}x + \frac{-3}{1}y = \frac{25}{1}$

円の接線②

円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

証明 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ を中心 (a, b) 円周 $(0, 0)$ にくよう平行移動すると, 点 (x_1, y_1) は点 $(x_1 - a, y_1 - b)$ に移る。この点における円 $x^2 + y^2 = r^2$ の接線の方程式は

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = r^2$$

この接線を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動

したものが、求めたい円の接線の方程式だから、

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 \quad (\text{終})$$

$$\frac{y_1}{x_1} \leftarrow y \text{ の増加量}$$

$$\frac{x_1}{y_1} \leftarrow x \text{ の増加量}$$

2直線 $y = m_1 x + n_1, y = m_2 x + n_2$ が垂直 $\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

重要!

点 (x_1, y_1) を通り, 傾き m の直線

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

(ii) ① 接点 $P(r, 0)$ のとき

$$rx + 0 = r^2 \quad x = r$$

② 接点 $P(-r, 0)$ のとき

$$-rx + 0 = r^2 \quad x = -r$$

↓

(ii) の式は $x_1 x + y_1 y = r^2$ に

集約できる

(iii) の場合も同様!

例 円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 上の点 $(4, 2)$ における接線の方程式

$$(4-1) \cdot (x-1) + (2+2) \cdot (y+2) = 25$$

$$3x + 4y = 20$$

Level up!

応用 点 $A(1, 3)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する直線の方程式を求めよ。

4

↑
上の通る点

式には接点が必要

But 接点は不明

接点との区別が大事!

接点を (x_1, y_1) とする

接点を設定する!

解 接点を $P(x_1, y_1)$ とすると

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \dots\dots ①$$

また、点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 5 \quad \dots\dots ②$$

この直線が点 A を通るから

$$x_1 + 3y_1 = 5 \quad \dots\dots ③$$

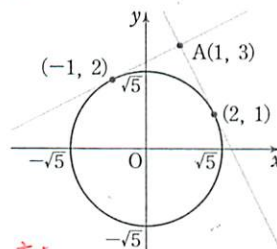
①, ③ から x_1 を消去して整理すると

$$y_1^2 - 3y_1 + 2 = 0 \quad \text{ゆえに } y_1 = 1, 2$$

③ から $y_1 = 1$ のとき $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ のとき $x_1 = -1$

よって、接線の方程式 ② は、次のようになる。

$$2x + y = 5, \quad -x + 2y = 5$$



流れ ①, ③ を使って x_1, y_1 を求める
② に代入する

⇒ Ex. 31

* 思考力を高めるためのワンポイントレッスン *

質問です。接線とはどんな線ですか? 答えは、ある図形に接する直線です。

そう、"直線"です。なので、公式に頼らなくても、直線の方程式 $y - y_1 = m(x - x_1)$

を利用して考えよう! ですね!!

上の応用問題4だと、次のようにも考えられます。

別解

点 $(1, 3)$ を通り x 軸と垂直な直線 $x = 1$ は

接線とはならない。よって、求める接線の

傾きを m とすると、接線の方程式は

$$y - 3 = m(x - 1)$$

すなわち $mx - y + 3 - m = 0 \quad \dots\dots ①$

よって円 $x^2 + y^2 = 5$ の中心: 点 $(0, 0)$ と直線 ① の距離が、

円の半径 $r = \sqrt{5}$ に一致するのだ。

← $D = 0$ を用いても
OK!

$$\frac{|10 - 0 + 3 - m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|13 - m| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

$$(3 - m)^2 = 5(m^2 + 1)$$

$$これを解いて $m = \frac{1}{2}, -2$$$

よって、求める接線の方程式は、①より

$$-x + 2y = 5, \quad 2x + y = 5$$

円の接線の対処法

① 公式 $x_1x + y_1y = r^2$

② 接線と $y - y_1 = m(x - x_1)$ とおいて

• (接線) $\perp$ (半径)

• (円の中心と接線の距離) = (半径)

• 接する $\rightarrow D = 0$

• 微分を使う

の、いずれかを使って
 m の値を求める

ぐちゃぐちゃ言いましたバ、接線は「直線」というイメージは必ず持つていて
下さい!!