

第3節 軌跡と領域

Date

No.

8. 軌跡と方程式

→ 与えられた条件を満たす点が動いてできる図形

(点が動いた跡
一定の条件を満たす点の集合)

→ 軌跡の例

- ① 2点A, Bから等距離にある点の軌跡
→ 線分ABの垂直二等分線
- ② $\angle AOB$ の内部にある、2直線OA, OBから等距離にある点の軌跡
→ $\angle AOB$ の二等分線

例題 9 2点A(0, 0), B(3, 0)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。

解

点Pの座標を(x, y)とする。

Pの満たす条件は

→ $AP:BP=2:1$ ② 関係式を

これより $AP=2BP$

すなわち $AP^2=4BP^2$

$AP^2=x^2+y^2$, $BP^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると

$$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

整理すると

$$x^2+y^2-8x+12=0$$

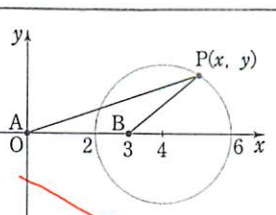
すなわち

$$(x-4)^2+y^2=2^2 \dots \dots \textcircled{1}$$

ゆえに、条件を満たす点Pは、円①上にある。

逆に、円①上の任意の点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は、中心が点(4, 0)、半径が2の円である。



関係式からx, yの方程式を導く!!

③ 軌跡の方程式を導く

④ ③の方程式が表す図形を求む

図形の名称は必ず書くこと

⑤ 逆の確認

必要性の言及がMust!!

⑥ 設問にある用語・文字・記号などを

用以表現する(これが答え)

↓

⇒ Ex. 36, 37

⑦ とぞぞ、必要性が...と言う件

この言及はどのように意味がある記述なのか??

→ 図形の存在の保証に関係するからデス!

↓

問. 2点A(-3, 0), B(2, 0)と点Pを頂点とする $\triangle PAB$ が、

$PA:PB=3:2$ を満たす点Pが変化するとき、点Pの軌跡を求めよ。

解) 点P(x, y)とする

$$PA:PB=3:2 \text{ より}$$

$$9PB^2=4PA^2$$

$$9\{(x-2)^2+y^2\}=4\{(x+3)^2+y^2\}$$

$$\text{整理すると } x^2+y^2-12x=0$$

$$(x-6)^2+y^2=36 \text{ --- ①}$$

参照

例題9を

線分ABを

2:1に内分する点: 点(2, 0)

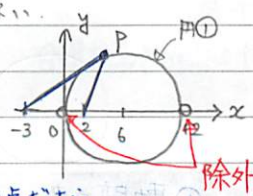
2:1に外分する点: 点(6, 0)

ともに円 $(x-4)^2+y^2=2^2$ 上の点であり、直径の両端である。

↓
"アポロニウスの円"という
(説明は Ex. p102 [補足])

ここで、3点A, B, Pは三角形の頂点だから、一直線上に並ぶことはない。Pはx軸上には存在しない。

よって、点Pは円①から、2点(0,0), (12,0)を除いた図形上にある



逆に、この図形上の任意の点P(x,y)は条件を満たす。

よって、求める軌跡は、中心が点(6,0)、半径が6の円から、2点(0,0), (12,0)を除いた図形である (終)

⇒ CHART p.153

(文字でおく点、が2つ以上あるパターン)

応用
例題
7

点Qが円 $x^2+y^2=16$ 上を動くとき、点A(6, 0)と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

座標が明記されていない点、が2個あるとき、

“軌跡を考える点”と“途中で使う点(つなぎの点)”を区別する

(x, y)とおく

(s, t)など、x, y以外でおく

使う文字が増えるだけ
やることはあんまり変わらないよ。

解 点P, Qの座標を、それぞれ (x, y), (s, t) とする。

Qは円 $x^2+y^2=16$ 上にあるから

$$s^2+t^2=16 \quad \dots\dots ①$$

Pは線分AQの中点であるから

$$x = \frac{6+s}{2}, \quad y = \frac{0+t}{2}$$

ゆえに $s=2x-6, t=2y$

これを①に代入すると

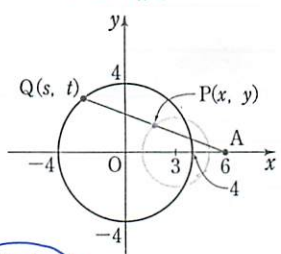
$$(2x-6)^2+(2y)^2=16$$

すなわち $(x-3)^2+y^2=2^2 \quad \dots\dots ②$

ゆえに、条件を満たす点Pは、円②上にある。

逆に、円②上の任意の点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は、中心が点(3, 0)、半径が2の円である。



x, yだけに
するとは

s, tを
残したら
OK

⇒ Ex. 38

視野を広げるために

⇒ CHART 基例100.