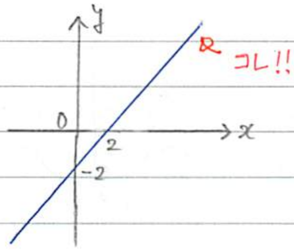
Date . . No.

9. 不等式の表す領域

$\boxed{y = x - 2}$

↳ この方程式を満たす点(x, y)
全体の集合は直線 →

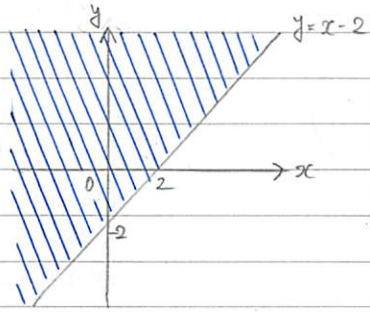


↓

$\boxed{y > x - 2}$

を満たす点(x, y)全体の集合はどんな図形を表すだろうか？

$y = x - 2$より
上側のこの
部分 →



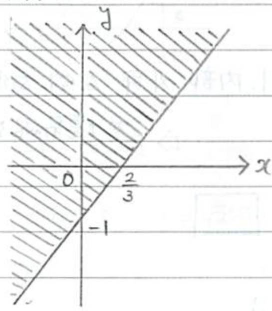
$y > x - 2$ということは
yの値が$x - 2$より
大きくなる所を言えば
いいよね。

↓ イメージはつかめたと思うので
問題の答え方を説明するよ。

例 ① $3x - 2y - 2 \leqq 0$ の表す領域を図示せよ。

変形すると、

$y \geqq \frac{3}{2}x - 1$



← $y \geqq \frac{3}{2}x - 1$ ということは
$y = \frac{3}{2}x - 1$ の上側
と、直線上

求める領域は図の斜線
部分である。ただし、境界
線を含む。

↑

図示するだけでは、境界線を含むか含まないかが
わからないので、言葉を添える。

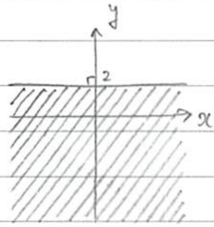
--→ $<, >$ 境界線を
(=なし) 含まない

$\leqq, \geqq$ 境界線を
(=あり) 含む

② $y \leqq 2$

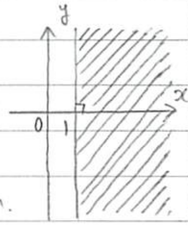
毎回、言葉を添えましょう

求める領域は
図の斜線部分で
ある。ただし、境界
線を含む。

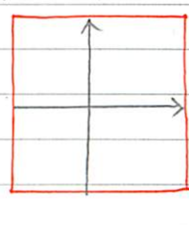


③ $x > 1$

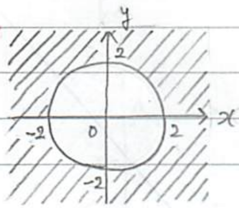
求める領域は
図の斜線部分
である。ただし、
境界線を含まない。



線をひく範囲は 軸と軸で
つくる四角形
を意識しよう



④ $x^2+y^2>4$



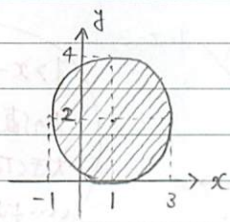
求める領域は図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

⑤ $x^2+y^2-2x-4y+1\leqq 0$ (例題10)

↓ 変形

$(x-1)^2+(y-2)^2\leqq 4$ より

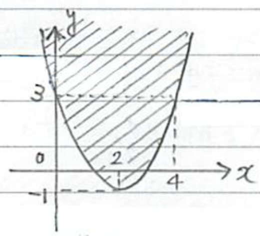
求める領域は図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



⑥ $y>x^2-4x+3$

$y>(x-2)^2-1$

求める領域は図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない



⇨ Ex:39~42

《図,言葉から式をつくる》

問. 中心が点(2, −3),半径が5の円の内部を表す不等式をつくれ.
ただし,境界線を含まないものとする.

① 境界線となる図形の方程式をつくる

境界線は

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

② 不等式をつくる.(上下.内外.左右 と 境界線を含むか否かに着目)

よって 求める不等式は

$(x-2)^2+(y+3)^2<25$

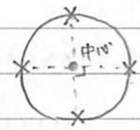
⇨ Ex. 43.

注意

円をグラフでかく経験は、ここがはじめてですね!

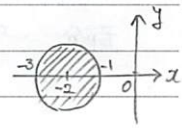
円をかくときは、

円の中心と 4点(×印)の座標がわかるようにしておくのが一般的です。



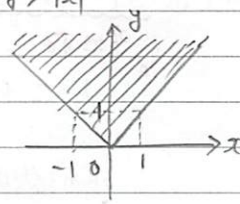
問6 答え

求める領域は図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



→ おまけ

⑦ $y>|x|$



Date . . No.

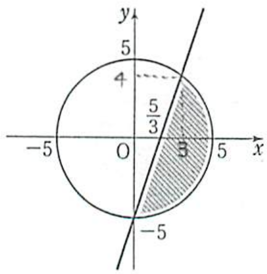
＜連立不等式の表す領域＞

例題 11 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y<3x-5 \end{cases}$$

それぞれの不等式が満たす領域の共通部分

解　求める領域は図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



（教科書の解説のように，記述にもOKですが，シンプルにこれだけでも大丈夫です）

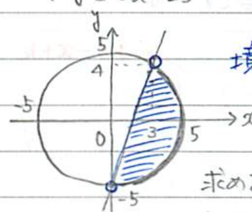
⇨ Ex.44

☆ "連立"は"かつ（共通部分）"が，ここでも活きる

教科書にはありませんが

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y\leqq 3x-25 \end{cases}$$

一方のみ等号を含む → 境界線の扱いに注意しよう。



求める領域は図の斜線部分である。ただし，境界線は，直線 $y=3x-25$ 上の円 $x^2+y^2=25$ との交点を除く部分のみ含み，他の部分は含まない。

含む場所・含まない場所がある。

例題 12 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x-y)(x+y-2)<0$$

⊕ × ⊖
or
⊖ × ⊕

$AB<0 \iff A>0, B<0$ または $A<0, B>0$

$AB>0 \iff A>0, B>0$ または $A<0, B<0$ も忘れずに!!

解）与えられた不等式は

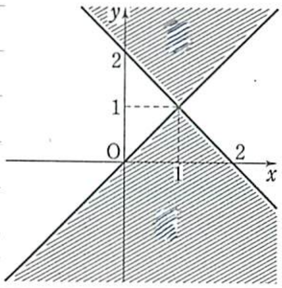
$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-2>0 \end{cases}$$

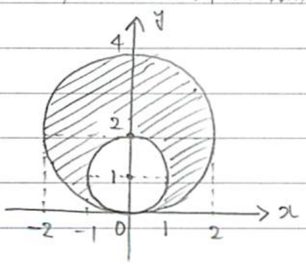
が成り立つことと同値である

よって，求める領域は，図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



⇨ Ex.45

問　次の図の斜線部分は，どのような不等式の表す領域か。ただし，境界線は含まない。



$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2>1 \\ x^2+(y-2)^2<4 \end{cases}$$

小さい円（$x^2+(y-1)^2=1$）の外側
大きい円（$x^2+(y-2)^2=4$）の内側

No. Date . .

＜領域の最大・最小（線形計画法）

応用例題 8　x, y が 4 つの不等式

$y \leqq -\frac{2}{3}x+4$　$y \leqq -2x+8$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ 2x+y \leqq 8$$

を満たすとき，$\boxed{x+y}$ の最大値および最小値を求めよ。

$\boxed{x+y}=k$ とおく

考え方

4つの不等式が表す領域を図示し、この領域と $\boxed{x+y=k}$ が共有点をもつようなkの値の範囲を調べ、kの最大値・最小値を答えればよい!!

領域内の (x, y) のうち、式 $\boxed{x+y}$ の値が最大になるもの、最小になるものをみつけよう という問題

$y=-x+k$

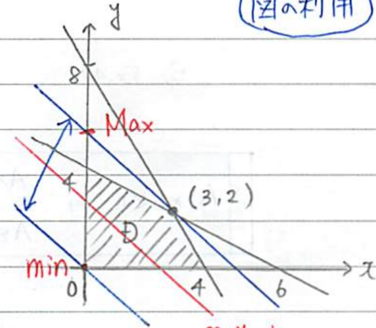
解）$x+y=k$ ―① とおく

また、4つの不等式が満たす領域をDとする。

求める $x+y$ の最大値・最小値は、直線①と領域Dが共有点をもつときのkの値の最大値・最小値に一致する。

正確に!!

図の利用



← 境界線の交点の座標も求めておくこと!!

図より

①が点(3, 2)を通るときkの値は最大、原点を通るときkの値は最小となる。

ゆえに、$x+y$ は、

$x=3$, $y=2$ のとき 最大値 5

$x=0$, $y=0$ のとき 最小値 0 をとる。

⇨ Ex. 46

4STEP p52 233

<領域を利用した不等式の証明>

数I で学んだこと

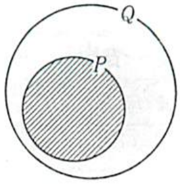
一般に，2 つの条件 p，q について

条件 p を満たすもの全体の集合を P

条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，次のことが成り立つ。

「$p \Longrightarrow q$ が真である」$\Longleftrightarrow$「$P \subset Q$ が成り立つ」



考え方はコレ (既習!!)

応用例題 9 x，y は実数とする。次のことを証明せよ。

$$x^2+y^2<1 \quad ならば \quad x^2+y^2+2y-3<0$$

〈解説〉不等式 $x^2+y^2<1$，$x^2+y^2+2y-3<0$ の表す領域を，それぞれ P，Q として，$P \subset Q$ であることを示す。

証明　不等式

$$x^2+y^2<1$$

の表す領域を P，不等式

$$x^2+y^2+2y-3<0$$

の表す領域を Q とする。P は円

$$x^2+y^2=1$$

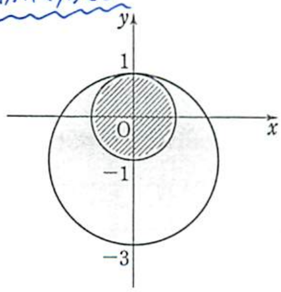
の内部，Q は円

$$x^2+(y+1)^2=4$$

の内部であり，図から $P \subset Q$ である。

よって，$x^2+y^2<1$ ならば $x^2+y^2+2y-3<0$ である。終

図示に考える



⇨ Ex.47

数I で扱ったこと.

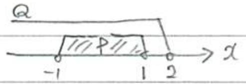
問. x は実数とする. 集合を用いて次の命題が正しいことを示せ.

$-1<x<1 \Rightarrow x<2$

証明

$P=\{x \mid -1<x<1, x \in \mathbb{R}\}$

$Q=\{x \mid x<2, x \in \mathbb{R}\}$ を考える



数直線より $P \subset Q$ となるので

$-1<x<1 \Rightarrow x<2$

といえる (終)