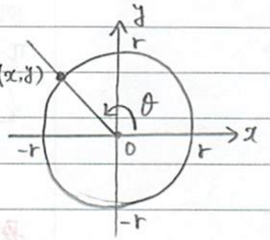
2. 三角関数

三角比と同様に

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$



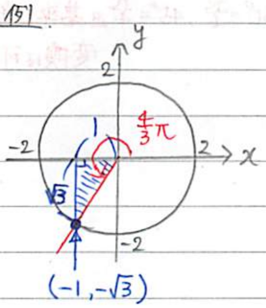
と定義する。

㊟ $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n:整数) では $\tan\theta$ は定義されない

↓

ということは、$\sin\frac{4}{3}\pi$ の値も求められるんですか? — Yes!!

例



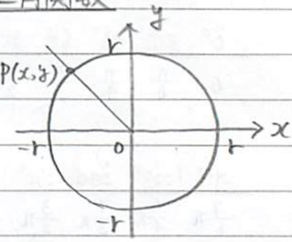
$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

⇨ Ex.6

三角関数



原点を中心とする半径rの円と
x軸の正の部分を始線とした
角θの動径との交点をP(x, y)とする

$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$

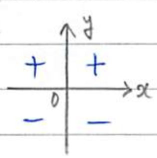
は半径rに無関係で，角θだけで定まる!!

表でまとめておきましょう。※すべて自力で導出できるようにすること!!

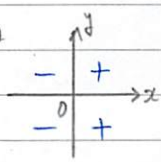
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

◎ 三角関数の値の符号

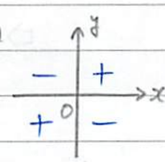
$\sin\theta$



$\cos\theta$



$\tan\theta$



例 $\sin\theta\cos\theta > 0$ を満たす θ の動径は第何象限か。

$\sin\theta\cos\theta > 0$ より

$\boxed{\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \cos\theta > 0 \end{cases}}$ または $\boxed{\begin{cases} \sin\theta < 0 \\ \cos\theta < 0 \end{cases}}$

↓ ↓

よって

第1象限 または 第3象限

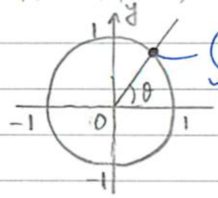
AB > 0

⇔ A > 0, B > 0
または
A < 0, B < 0

Date　　・　・　　No.

Q 三角関数の値の範囲

半径1（単位円）



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $r = 1$ → $\sin\theta$は単位円周上のy座標

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $r = 1$ → $\cos\theta$は単位円周上のx座標

$\tan\theta = \boxed{\dfrac{y}{x}}$ → OPの傾き

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$　　$\tan\theta$の値は実数全体

＜三角関数の相互関係＞

① Def.より

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

② $\sin\theta$, $\cos\theta$は単位円周上の y座標, x座標であり,
単位円の方程式は

$x^2 + y^2 = 1$ だから

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

③ ②の両辺に $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ をかけると

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

①より

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

三角比の相互関係と同じ!!

例題 1 θの動径が第3象限にあり, $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき, $\cos\theta$と$\tan\theta$の値を求めよ。

解) cosθから求める.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \dfrac{16}{25}$

θの動径が第3象限にあるから

$\cos\theta < 0$ より

$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

→ 残りを求める.

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

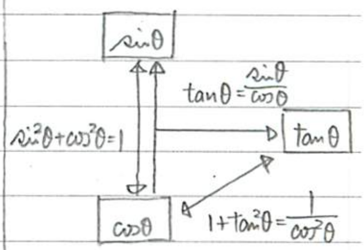
$\tan\theta = \dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$

$= \dfrac{4}{3}$

ゆえに

$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

→ 使う式



問. $\tan\theta = -2$ のとき, $\sin\theta$と$\cos\theta$を求めよ.

解) cosθから求める.

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1 + (-2)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 5$

No. Date

$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

2つの可能性があるので場合分けをする。

(i) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$= -2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに、 $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ または $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

⇨ Ex.7, 8

例題 2 等式 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

……… $\tan\theta$ を $\sin\theta, \cos\theta$ で表し、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用する

☆ 式変形のトレーニングをつむ例題

技 相互関係をうまく利用すると式をシンプルな形に変形できる!!

証明

$$(左辺) = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$= (右辺)$ となり成り立つ (終)

⇨ Ex. 9

例題 3 $\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，次の式の値を a を用いて表せ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

解 (1) $\sin\theta+\cos\theta=a$ の両辺を 2 乗すると

技 和→積を求めるときは 2乗してみよう!

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2-1}{2}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)=\frac{a(3-a^2)}{2}$

◎使える式
- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
  or
  $(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) 別解

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=a^3-3\cdot\frac{a^2-1}{2}\cdot a$

$=\frac{a(3-a^2)}{2}$

⇨ Ex. 10

4STEP p.60 例題24