

第1節 複素数と2次方程式の解

1. 複素数とその計算

B. 複素数の計算

例2.

$$(1) (4-3i) + (2+5i) = (4+2) + (-3+5)i$$

$$= 6 + 2i$$

虚部どうしの加法

実部どうしの加法

$$(2) (4-3i) - (2+5i) = (4-2) - (3+5)i$$

$$= 2 - 8i$$

虚部どうしの減法

実部どうしの減法

← 複素数の加法・減法は
ただの文字式の計算(中2)と
変わらない。

$$← (4-3i) - (2+5i)$$

$$= 4 - 3i - 2 - 5i$$

$= 2 - 8i$ も OK. 計算上は
下の複素数の乗法を使っている。

例3

$$(1) (1+2i)(4+i) = 4 + i + 8i + 2i^2$$

$$= 4 + i + 8i + 2 \times (-1)$$

i は虚数単位で $i^2 = -1$ だった

$$= 4 + i + 8i - 2 = (4-2) + (1+8)i = 2 + 9i$$

← $(1+2x)(4+x)$ の展開と
同じやりかた!

$$(2) (1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2$$

$$= 1 - 4 \times (-1) = 5$$

$i^2 = -1$ を代入. 忘れずに!

← $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
を使, たよ! 乗法公式を
応用できるよ.

共役な複素数... 複素数 $a+bi$ に対して $a-bi$ を
共役な複素数という. 逆も同じ.

← 実部 a はそのまま
虚部の プラスとマイナス を
ひっくり返せば共役複素数
になる.

例4

$$(1) 1+2i \text{ の共役複素数 } \dots 1-2i$$

$$(2) -3i \text{ の共役複素数 } \dots 3i$$

互いに共役な複素数の和と積

$$\text{和 } (a+bi) + (a-bi) = 2a$$

$$\text{積 } (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

どちらも i が消えて実数になる。

例5 $1+2i$ と共役な複素数は $1-2i$. 分母と分子にかけて.

$$\begin{aligned} \frac{2+9i}{1+2i} &= \frac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i+9i-18i^2}{1^2+2^2} \\ &= \frac{2-4i+9i-18 \times (-1)}{1+4} \quad i^2 = -1 \text{ を忘れずに! 毎回確認!} \\ &= \frac{20+5i}{5} = \frac{1}{1} \frac{4+i}{1} = 4+i. \end{aligned}$$

← 共役な複素数 を分母と分子にかける. 分母に i を含む式は このようにして分母に i を含まない形に変形する. 昨年学習した
分母の有理化
みたいだね.

複素数の四則

$$\text{加法 } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{減法 } (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$\text{乗法 } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\text{除法 } \frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

上の結果から、次のことがいえる。

1. 2つの複素数の和、差、積、商は 常に複素数 である。

2. α, β が複素数で $\alpha\beta = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

※ 「常に複素数」というのは自然数、整数、有理数、無理数、実数を含んでいる。つまり、ふつうは実数ととらえる数を複素数と解釈するということ(右図)

警告!

← これらを暗記するのはなく、計算の方法を覚えてください。つまり、きまぐれや、2いた計算方法です。

加減: 文字式と同じ計算

乗: $i^2 = -1$ を忘れない!

除: 分母の共役複素数を分母と分子にかける。

← α はピルファ、 β はバータと読む(ギリシャ文字)



C. 負の数の平方根

復習 平方根 ... 2乗すると a になる数を a の平方根という

$a > 0$ のとき $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ とくに $\sqrt{-1} = i$
 これが決まりごと! 熱

負の数の平方根

$a > 0$ のとき $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ すなわち $\pm\sqrt{a}i$

例6

(1) $\sqrt{-8} = \sqrt{8}i = 2\sqrt{2}i$

(2) -6 の平方根 ... $\pm\sqrt{6}i$ (2つある!)

例7

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = \sqrt{2 \times 3}i^2 = \sqrt{6} \times (-1) = -\sqrt{6}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}i} = \frac{\sqrt{3}}{2i} = \frac{\sqrt{3}i}{2i^2} = \frac{\sqrt{3}i}{2 \times (-1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$

警告!

例7 (1) で $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{6}$ はできない!

さきから言及しているように、 $\sqrt{\quad}$ の中が負のものは、まず虚数単位 i に直すのが最優先であって、計算はそのあと。

一般に $a < 0, b < 0$ のとき $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ は NG!

← a の正・負については何も問われていない。今までは正と0のときだけを考えてきた。
 しかし、今回は左のように負のときも考える。

← 「...の平方根は」と問われたら2つあるので注意!

← まずは虚数単位 i に直してから!

← まずは虚数単位 i に直してから!

← $\sqrt{\quad}$ の中が正のものはふっつの実数なので何もしなくてよい。

← $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ としてよいのは昨年学習したように。
 $a > 0, b > 0$ のときだけ!