7. グラフと2次不等式

例16)

1次不等式 $2x-4>0$ を解く

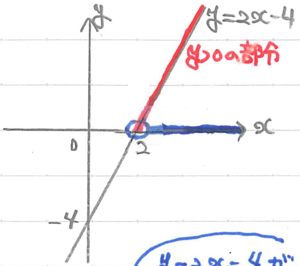
これまで

$2x-4>0$

$2x>4$

$x>2$ と解く

1次関数 $y=2x-4$ のグラフを利用して考える



不等式 $\underbrace{2x-4}_{y=2x-4}>\underbrace{0}_{y=0\,(x軸)}$ を

グラフにおいて

$y>0$ となる x の範囲を求める

と考えて

$y=2x-4$ が x 軸より上側にある

$x>2$ と解く

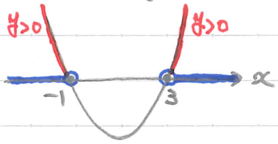
1次不等式を解くときは、これまで通りに解くが

2次不等式を解くときは、このグラフを利用して考えることが大切になる

例17)

2次不等式 $x^2-2x-3>0$ を解く

2次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフを利用して考える



$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=-1,\ 3$

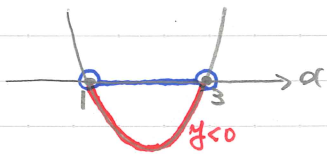
$y=x^2-2x-3$ が x 軸より上側にある

2次不等式 $\underbrace{x^2-2x-3}_{y=x^2-2x-3}>\underbrace{0}_{y=0\,(x軸)}$ なので $y>0$ となる x の範囲を考えて、

$x<-1,\ 3<x$

2次不等式 $x^2-2x-3\geqq 0$ となれば、解は、$x\leqq -1,\ 3\leqq x$

また、2次不等式 $x^2-2x-3<0$ を解く



$y=x^2-2x-3$ が x 軸より下側にある。

2次不等式 $x^2-2x-3<0$ なので $y<0$ となる x の範囲を考えて、

$-1<x<3$

2次不等式 $x^2-2x-3\leqq 0$ となれば、解は、$-1\leqq x\leqq 3$

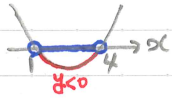
以上のことから

$\alpha < \beta$ のとき
$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は $x<\alpha,\ \beta<x$

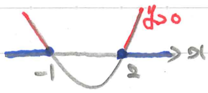
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は $\alpha<x<\beta$

内容を理解したら、不等号の向き と 答えの形 をセットで理解してもよい。
>0 ⋯→ $x<$◎, △$<x$
<0 ⋯→ ◎$<x<$△

例18) $(x-1)(x-4)\leqq 0$
$1\leqq x\leqq 4$



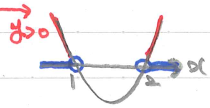
例19) $(x+1)(x-2)\geqq 0$
$x\leqq -1,\ 2\leqq x$



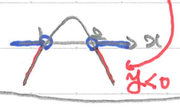
因数分解できなくても、解の公式によって $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の2つの解が求められる

また、$-x^2+3x-2<0$ のように x^2 の係数に"−"がついている場合は、
両辺に"−"をかけて、必ず、x^2の係数を正にする。

$-x^2+3x-2<0$
$x^2-3x+2>0$ 向きが変わる。
$(x-2)(x-1)>0$
$x<1,\ 2<x$



もし、しないと、グラフが上に凸になる
$-x^2+3x-2<0$
$y=-x^2+3x-2$



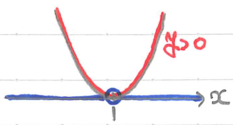
ここまでは、グラフとx軸が、必ず2つの共有点をもつ場合。

次に、グラフとx軸が1つの共有点（接する）をもつ場合、
グラフとx軸が共有点を持たない場合
について考える。

例20)

2次不等式 $x^2-2x+1>0$ を解く

2次関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフを利用して考える.



$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$x=1$ のとき、x軸と重なっているので $x=1$ だけ解に入らない

2次不等式 $x^2-2x+1>0$ なので $y>0$ となる x の範囲を考えて

1以外のすべての実数

2次不等式 $x^2-2x+1\geqq 0$ となれば、解は、すべての実数

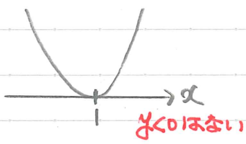
$y=0$ も含まれるので $x=1$ も解になるので

また、2次不等式 $x^2-2x+1<0$ となれば、解はない.

$y<0$ となる部分はないので

2次不等式 $x^2-2x+1\leqq 0$ となれば、解は $x=1$

$y=0$ も含まれるので $x=1$ だけ解に入る



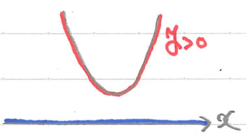
グラフが x軸と接するときは

「$x=a$ 以外のすべての実数」,「すべての実数」,「解はない」,「$x=a$」

のいずれかなので, グラフから十分に考えて解こう。

例21)

2次不等式 $x^2-2x+2>0$ を解く



$x^2-2x+2=0$

判別式 $D/4=(-1)^2-1\cdot 2$

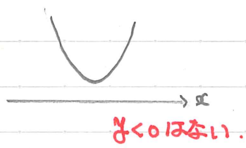
$=-1<0$ で x軸と交わらない

2次不等式 $x^2-2x+2>0$ なので $y>0$ となる x の範囲を考えて、すべての実数

2次不等式 $x^2-2x+2\geqq 0$ となれば、解はすべての実数.

また、2次不等式 $x^2-2x+2<0$ となれば、解はない

2次不等式 $x^2-2x+2\leqq 0$ となれば、解はない



グラフが x軸と共有点をもたないときは、

「すべての実数」,「解はない」のいずれかである.

応用例題8, 9と例題12は授業動画も参照、

問8　$3 < x^2+2x \leqq 8$ より

$$\begin{cases} 3 < x^2+2x \\ x^2+2x \leqq 8 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} x^2+2x-3>0 \cdots ① \\ x^2+2x-8 \leqq 0 \cdots ② \end{cases}$$ 連立不等式

①より

$x^2+2x-3>0$

$(x+3)(x-1)>0$

$x<-3,\ 1<x \cdots ①'$

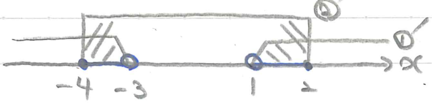
②より

$x^2+2x-8 \leqq 0$

$(x+4)(x-2) \leqq 0$

$-4 \leqq x \leqq 2 \cdots ②'$

①'②'より



$-4 \leqq x < -3,\ 1 < x \leqq 2$