6. グラフと2次方程式

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x軸の共有点の x座標を求めるには、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解けばよい。

$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0\ (x\text{軸}) \end{cases}$ の連立方程式で グラフと x軸の交点が求められる

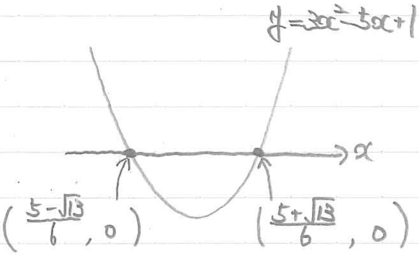
例13)

2次関数 $y=3x^2-5x+1$ のグラフと x軸の共有点の座標は、

$$3x^2-5x+1=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$



よって共有点の座標は

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}, 0\right), \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0\right)$$

← x軸との共有点なので y座標は 0

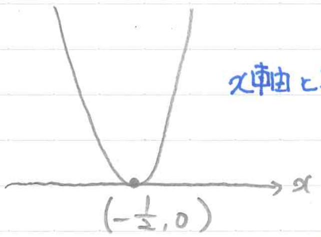
例14)

2次関数 $y=4x^2+4x+1$ のグラフと x軸の共有点の座標は

$$4x^2+4x+1=0$$

$$(2x+1)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$



x軸と接する。

よって、共有点の座標は

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

解が1個なので、グラフと x軸の共有点は1つとなる。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ と 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について。

判別式D	2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の個数	2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ	グラフと x軸との共有点
$D>0$ 正	2個 (異なる2つの実数解)		2個
$D=0$	1個 (重解)	 接点 接する 接点	1個
$D<0$ 負	0個		0個 (共有点をもたない)

実際に解くときに計算すること。

問題文では、こちらの内容で出題されます

例1.5)

2次方程式 $x^2-3x-2=0$ の判別式をDとすると

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-2)$$
$$=17>0$$

よって、共有点は2個.

P.107 発展

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ と x軸($y=0$)の交点で

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を考えればよい.

同様に

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ と 直線 $y=mx+n$ の交点で

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+n \end{cases}$$

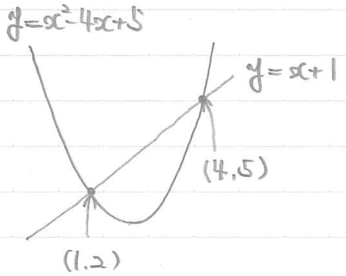
つまり) 2次方程式

$ax^2+bx+c=mx+n$ を考えればよい

つまり)

グラフの交点を考えるときは、グラフの式の連立方程式で考えることができる

例1) $\begin{cases} y=x^2-4x+5 \\ y=x+1 \quad \cdots ① \end{cases}$



よって $x^2-4x+5=x+1$

$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=1,4$

①より $x=1$ のとき $y=2$

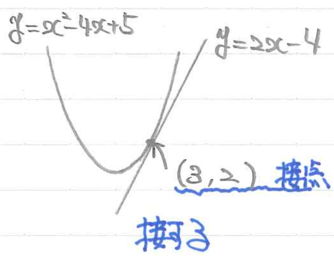
$x=4$ のとき $y=5$

よって 共有点は $(1,2),(4,5)$

解が2つ つまり 共有点は2つ

放物線と直線は2点で交わる.

例2) $\begin{cases} y=x^2-4x+5 \\ y=2x-4 \quad \cdots ① \end{cases}$



よって $x^2-4x+5=2x-4$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x=3$

①より $x=3$ のとき $y=2\cdot3-4=2$

よって、共有点は$(3, 2)$

解が1つ、つまり共有点は1つ
放物線と直線は接する。

例3) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2x - k \end{cases}$

よって $x^2 - 1 = 2x - k$

$x^2 - 2x + k - 1 = 0$

この方程式の判別式をDとすると

$D/4 = (-1)^2 - 1 \cdot (k-1)$

$= 1 - k + 1$

$= 2 - k$

放物線と直線が接するためには

$D/4 = 0$ となればよい

$2 - k = 0$

$k = 2$

問題文は
放物線と直線が接する
つまり
判別式$D = 0$
実際、計算するのはこれだけ!!