◇ 実数

実数：整数、有限小数または無限小数で表される数

無理数：実数のうち有理数でないもの

→ 循環しない無限小数で表される。

ex) $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$, $\pi = 3.14159265\cdots$

実数	有理数	整数	自然数
			0
			負の整数
		有限小数	
		循環小数	
	無理数 … 循環しない無限小数		

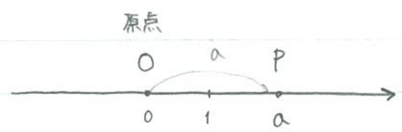
◇ 数の範囲と四則

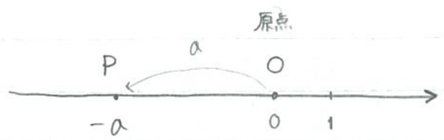
(四則計算：和，差，積，商)

> 2つの有理数の和，差，積，商は有理数である。
> 2つの実数の和，差，積，商は実数である。

練24でしっかり確認してください。

◇ 実数と数直線





Pの座標が a のとき $P(a)$ で表す。

この辺は復習です！

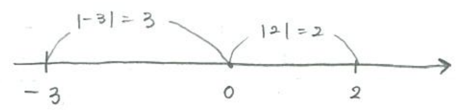
◇ 絶対値

数直線上でキョリ，$|a|$ と表す。

例18

2の絶対値　$|2| = 2$

-3の絶対値　$|-3| = 3$



絶対値の性質

1. $|a| \geqq 0$
2. $a \geqq 0$ のとき $|a| = a$
   $a < 0$ のとき $|a| = -a$

ややこしいと思うので，例19で確認

例19

(1) $|6-2| = |4| = 4$

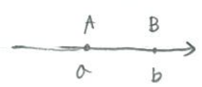
(2) $|2-6| = |-4| = 4$　　$|-4| = -(-4) = 4$

符号を＋にするため－をつけてはずす！

(3) $1-\sqrt{2} < 0$　　$(1 - 1.414\cdots = -0.414\cdots)$

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

数直線上の2点AB間のキョリ



$a \leqq b$ のとき　$AB = b - a$

$a > b$ のとき　$AB = a - b = -(b-a)$

より　$AB = |b - a|$　で表される。

例20　2点 A(−4), B(3) 間のキョリ

$AB = |3-(-4)| = |7| = 7$

5　根号を含む式の計算

◇ 平方根
↑ 中学で既習

2乗して a になる数を a の平方根，$\sqrt{a}$ という。

例21
9の平方根は $3, -3$ より ± 3

$\sqrt{9}$ は 9の正の平方根より $\sqrt{9} = 3$.

1. $a \geqq 0$ のとき. $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a} \geqq 0$.

2. $\left.\begin{array}{l} a \geqq 0 \text{ のとき } \sqrt{a^2} = a \\ a < 0 \text{ のとき } \sqrt{a^2} = -a \end{array}\right\}$ すなわち. $\sqrt{a^2} = |a|$

2について
$a = 6$ のとき　$\sqrt{a^2} = \sqrt{6^2} = 6 = a$
すなわち. $\sqrt{a^2} = |a|$
$a = -6$ のとき　$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-6)^2} = 6 = -a$

◇ 根号を含む式の計算

$a>0,\ b>0,\ k>0$ のとき

3. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$　　4. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

5. $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

3の証明

$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$.
$\sqrt{a}>0$, $\sqrt{b}>0$ であるから, $\sqrt{a}\sqrt{b}>0$.
よって, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は 正の平方根である。
$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

例22
(1) $\sqrt{3}\sqrt{21} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3\cdot 7} = 3\sqrt{7}$

(2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{24}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

例23
(1) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$　← $2a+3a-4a$ と同じ
$= \sqrt{2}$

(2) $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}) = 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{5}) + \sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})$
$= 12 - 4\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 10$
$= 2 - \sqrt{10}$

◇ 分母の有理化

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

分母の項が1つ（左のような）の場合は，
中学で既習

例24
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の有理化

項が2つある場合どうしたら2つとも $\sqrt{\ }$ が外れるか。
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ の展開を使えばいい！

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{10}-2}{5-2} = \dfrac{\sqrt{10}-2}{3}$

動画参照問題

例題7 $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の分母の有理化

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3-2}$$

$$= 6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2$$

$$= 8+3\sqrt{6}$$

動画参照問題

応例4

$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき、次の値を求めよ。

まずxを有理化しておくといい！

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\cancel{2}(\sqrt{5}-1)}{\cancel{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(1) $x+y$

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

(2) xy

かけ算の場合は、
もとのx,yを使うと約分できる！
有理化前

$$xy=\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{5}+1}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{5}+1}}{\cancel{2}}=1$$

(3) $x^2+y^2=\underbrace{(x+y)^2}_{(1)より}-\underbrace{2xy}_{(2)より}$ より

(1),(2)を使ってとく！

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\cdot1=5-2=3$$

発展 2重根号 （$\sqrt{\ }$ の中に $\sqrt{\ }$ があるもの）

$\sqrt{p+q\sqrt{r}}$, $\sqrt{p-q\sqrt{r}}$ の形を簡単にする。

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$ より

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ より

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

☆ $a>0$, $b>0$ のとき

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$

2重根号

$a>0$, $b>0$ とする。

1. $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. $a>b$ のとき

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

例1

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

2にする！

約分すればもどる

例1つづき

(3) $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{21}}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

有理化!

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$