

⑧ P.6 第1章 数と式
第1節 式の計算
1 整式

◇ 単項式と多項式

単項式 : 数や文字などをかけてできる式
ex) $2, x, 3a^2, -5x^2y$

係数 : 単項式の数の部分
ex) $2x$ の係数は 2
 $3a^2$ の係数は 3
 x の係数は 1

次数 : 文字のかけられている数
ex) $2x$ の次数は 1
 $3a^2$ の次数は 2

例1

単項式 $-5x^2y$ の 係数 -5
次数 $3 \leftarrow x^2y$ は $x \times x \times y$ の3つ

例2

単項式 $3abx^2y$

(1) x に着目すると, 係数 $3aby$ 次数 2
 x だけを文字と見る (a, b, y は数とみる)

(2) y に着目すると, 係数 $3abx^2$ 次数 1
 y だけを文字と見る (a, b, x は数とみる)

(3) x と y に着目すると, 係数 $3ab$ 次数 3
 x, y だけを文字とみる (a, b は数とみる)

多項式 : いくつかの単項式の和

ex) $x^2 + 3xy + (-2y^2)$

それぞれの単項式を **項** という。

整式 : 単項式 と 多項式 を 合わせ?

◇ 同類項

同類項 : 文字の部分 が 同じ 項

例43

$$\begin{aligned} (1) \quad & \underline{8x^2} + \underline{3x} - \underline{6} - \underline{x^2} + \underline{5x} + \underline{3} \\ &= (\underline{8-1})x^2 + (\underline{3+5})x + (\underline{-6+3}) \\ &= \underline{7x^2} + \underline{8x} - \underline{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \underline{3x^2} - \underline{x^2y^2} - \underline{2y^2} + \underline{4x^2y^2} - \underline{3y^2} - \underline{x^2} \\ &= \underline{2x^2} + \underline{3x^2y^2} - \underline{5y^2} \end{aligned}$$

整式において、最も次数の高い項の次数を

整式の次数 といい、

次数 が n の 整式 を **n 次式** という。

定数項 : 文字を 含まない 項

ex) $7x^2 + 8x - 3$
 次数 2 1 0

より

2 次式

定数項 は -3

例4

(1) 整式 $ax^2 + bx + c$

x に着目すると, 2次式, 定数項 c
 x は x を文字とみる.

(2) 整式 $x^2y^3 + ax + b$

y に着目すると, 3次式, 定数項 $ax + b$
 y は y を文字とみる.

x と y に着目すると, 5次式, 定数項 b
 x と y は x と y を文字とみる.

$3x + x^3 - 5 - x^2$ について,

次数

⑤

$x^3 - x^2 + 3x - 5$ ④: 降べきの順

次数

④

$-5 + 3x - x^2 + x^3$: 昇べきの順

例5

整式 $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 5y - 4$

(1) x について, 降べきの順

$$x^2 + (2y - 3)x + (y^2 - 5y - 4)$$

(2) y について, 降べきの順

$$y^2 + (2x - 5)y + (x^2 - 3x - 4)$$

2 整式の加法と減法および乗法

交換法則

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

結合法則

$$(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$$

分配法則

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

◇ 整式の加法・減法

例6

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\underline{5x^3} - \underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{6}) + (\underline{4x^3} + \underline{2x^2} - \underline{6}) \\ &= \underline{(5+4)x^3} + \underline{(-2+2)x^2} + \underline{3x} + \underline{(-6-6)} \\ &= 9x^3 + 3x - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (\underline{5x^3} - \underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{6}) - (\underline{4x^3} + \underline{2x^2} - \underline{6}) \\ &= \underline{5x^3} - \underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{6} - \underline{4x^3} - \underline{2x^2} + \underline{6} \\ &= \underline{(5-4)x^3} + \underline{(-2-2)x^2} + \underline{3x} + \underline{(-6+6)} \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x \end{aligned}$$

別解) 筆算

$$\begin{array}{r} (1) \quad 5x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ +) \quad 4x^3 + 2x^2 \quad \quad - 6 \\ \hline 9x^3 \quad \quad \quad + 3x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad 5x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ -) \quad 4x^3 + 2x^2 \quad \quad - 6 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 3x \end{array}$$

例題1

$$A = x^3 - 4x^2y + y^3, \quad B = -2x^2y + 3xy^2 + 3y^2, \quad C = xy^2 + y^2$$

$$A - 2(B - C) + 4C$$

← このとき A, B, C に代入するとめんどい！

$$= A - 2B + 2C + 4C$$

先に整理をする！

$$= A - 2B + 6C$$

$$= (x^3 - 4x^2y + y^3) - 2(-2x^2y + 3xy^2 + 3y^2) + 6(xy^2 + y^2)$$

$$= x^3 - 4x^2y + y^3 + 4x^2y - 6xy^2 - 6y^2 + 6xy^2 + 6y^2$$

$$= x^3 + y^3$$

◇ 整式の乗法

累乗：文字をいくつか掛けたものを
n 個掛けたとき → n 乗

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ 個}} = a^{(n)} \quad \text{指数}$$

$$a^2 a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^{2+3} = a^5$$

$$(a^2)^3 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a^3 b^3$$

指数法則

m, n は正の整数とする。

$$1. a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2. (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

例 7

$$(1) \quad 2a^{\textcircled{3}} \times 5a^{\textcircled{4}} = (2 \times 5) a^{\textcircled{3} + \textcircled{4}} = 10a^7$$

$$(2) \quad 3x^{\textcircled{2}}y^{\textcircled{3}}z^{\textcircled{1}} \times 5x^{\textcircled{1}}y^{\textcircled{4}}z^{\textcircled{4}} = (3 \times 5) x^{\textcircled{2} + \textcircled{1}} y^{\textcircled{3} + \textcircled{4}} z^{\textcircled{1} + \textcircled{4}} \\ = 15 x^3 y^7 z^5$$

$$(3) \quad (3x^3y)^2 \times (-2x^3y) = 3^2 x^{3 \times 2} y^2 \times (-2x^3y) \\ = 9x^{\textcircled{6}}y^{\textcircled{2}} \times (-2x^{\textcircled{3}}y^{\textcircled{1}}) \\ = \{9 \times (-2)\} x^{\textcircled{6} + \textcircled{3}} y^{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \\ = -18 x^9 y^3$$

例 8

• 1F X と同じ意味

$$(1) \quad 2x(x^2 - 3x + 2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-3x) + 2x \cdot 2 \\ = 2x^3 - 6x + 4x$$

$$(2) \quad (2x^2 - 3xy - y^2)xy = 2x^2 \cdot xy - 3xy \cdot xy - y^2 \cdot xy \\ = 2x^3y - 3x^2y^2 - xy^3$$

例 9

$$(1) \quad (2x^2 - x - 3)(x + 2) = (2x^2 - x - 3) \cdot x + (2x^2 - x - 3) \cdot 2 \\ = \underline{2x^3} - \underline{x^2} - \underline{3x} + \underline{4x^2} - \underline{2x} - \underline{6} \\ = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

同類項を
まとめる
と3つ!!

$$(2) \quad (x^3 + 2 - 3x)(x - 1) = (x^3 + 2 - 3x)x + (x^3 + 2 - 3x) \cdot (-1) \\ = \underline{x^4} + \underline{2x} - \underline{3x^2} - \underline{x^3} - \underline{2} + \underline{3x} \\ = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

別解) 筆算

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 2x^2 - x - 3 \\
 \times) \quad x + 2 \\
 \hline
 2x^3 - x^2 - 3x \\
 4x^2 - 2x - 6 \\
 \hline
 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad x^3 \quad \quad - 3x + 2 \\
 \times) \quad x - 1 \\
 \hline
 x^4 \quad \quad - 3x^2 + 2x \\
 - x^3 \quad \quad + 3x - 2 \\
 \hline
 x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2
 \end{array}$$

◇ 展開の公式

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$2. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$3. (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

中学で既習済!!

例110

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (3x-2y)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 \\
 &= 9x^2 - 12xy + 4y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (5x+4y)(5x-4y) &= (5x)^2 - (4y)^2 \\
 &= 25x^2 - 16y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (x+2)(x-3) &= x^2 + (2-3)x + 2 \cdot (-3) \\
 &= x^2 - x - 6
 \end{aligned}$$

$$4. (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

例11

$$\begin{aligned} (1) (2x+5)(3x+4) &= 2 \cdot 3x^2 + 2x \cdot 4 + 5 \cdot 3x + 5 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 3x^2 + (2 \cdot 4 + 5 \cdot 3)x + 5 \cdot 4 \\ &= 6x^2 + 23x + 20 \end{aligned}$$

公式の形

$$\begin{aligned} (2) (3x-4)(4x+7y) &= 3 \cdot 4x^2 + (3 \cdot 7 - 1 \cdot 4)xy - 1 \cdot 7y^2 \\ &= 12x^2 + 17xy - 7y^2 \end{aligned}$$

◇ 式の展開の工夫

例12

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^2 \\ &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= (a+b+c)a + (a+b+c)b + (a+b+c)c \\ &= a^2 + \underline{ab} + \underline{ca} + \underline{ab} + b^2 + \underline{bc} + \underline{ca} + \underline{bc} + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + \underline{2ca} \end{aligned}$$

この部分に関して、 ca ? ac では? と並び方に違和感があると思います。

これは、 $ab \rightarrow bc \rightarrow ca$ と項の順番になっています。

これを **りんぱん 輪環の順** といいます。



この3つの項の2乗の展開は公式としておてOK!

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

例題 2

$$(a+b+c)^2 = \{ \underline{(a+b)} + c \}^2$$

$$\underline{a+b} = A \text{ とおくと, } = (\underline{A} + c)^2$$

$$= \underline{A}^2 + 2\underline{A}c + c^2$$

$$= (\underline{a+b})^2 + 2(\underline{a+b})c + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

工夫して展開すると、
(a+b)を1つとめて
展開するとわかる！

例題 3

$$(1) (x+1)^2(x-1)^2$$

$$= \{ (x+1)(x-1) \}^2$$

$$= (x^2 - 1)^2$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1$$

指数法則

$$(ab)^2 = a^2b^2$$

$$(2) (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= \{ \underline{(a^2 + b^2)} + ab \} \{ \underline{(a^2 + b^2)} - ab \}$$

$$\underline{a^2 + b^2} = A \text{ とおくと,}$$

$$= (\underline{A} + ab)(\underline{A} - ab)$$

$$= \underline{A}^2 - a^2b^2$$

$$= (\underline{a^2 + b^2})^2 - a^2b^2$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$= a^4 + a^2b^2 + b^4$$

(a+b)(a-b)
の展開になる！

同類項の計算までしっかり！