4、2次関数の決定

例題7, 8

「2次関数を求める」とは、2次関数を表す式を求めること.

次の2つの式の形を利用する

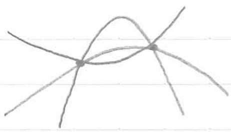
例題7 ◦ $y = a(x-p)^2 + q$ ← 頂点がわかっているとき (p, qの値がわかる)
軸がわかっているとき (pの値がわかる)

例題8 ◦ $y = ax^2 + bx + c$ ← グラフが通る3点がわかっているとき

問題で与えられた条件を見て、どちらの式を使うか判断する.

(補足)

2点を通る2次関数は



無数にある.

3点を通る2次関数は

必ず1つに定まる

例題7では a, p, q

例題8では a, b, c の3つを定める

例9)

・連立3元1次方程式の解き方

1つずつ文字を消していく.

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \cdots ① \\ 4a - 2b + c = -5 \cdots ② \\ 9a + 3b + c = 10 \cdots ③ \end{cases}$$

② − ①より

$$\begin{array}{rl} & 4a - 2b + c = -5 \\ -) & a + b + c = -2 \\ \hline & 3a - 3b = -3 \\ & a - b = -1 \cdots ④ \end{array}$$

③ − ②より

$$\begin{array}{rl} & 9a + 3b + c = 10 \\ -) & 4a - 2b + c = -5 \\ \hline & 5a + 5b = 15 \\ & a + b = 3 \cdots ⑤ \end{array}$$

④ + ⑤より

$$\begin{array}{rl} & a - b = -1 \\ +) & a + b = 3 \\ \hline & 2a = 2 \\ & a = 1 \end{array}$$

⑤より $1 + b = 3$
$b = 2$

①より $1 + 2 + c = -2$
$c = -5$

以上より $a = 1,\ b = 2,\ c = -5$

第2節　2次方程式と2次不等式

5. 2次方程式

例10)

$$x^2-2x-3=0$$ 因数分解

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ 3$$

2次方程式の解の公式

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$$

平方完成して、解いていくだけです
理学・教育系では定理、公式の証明はよく出題されます。

↓半分

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c=0$$

2乗を引く

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac\geqq 0$ のとき $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

√ の中に負の数は入らない

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ここで、bが2の倍数のとき

$ax^2+2b'x+c=0$ と表すことができ

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$ $\sqrt{4(b'^2-ac)}$

$$=\frac{-\cancel{2}b'\pm\cancel{2}\sqrt{b'^2-ac}}{\cancel{2}a}$$ ← 必ず約分ができる。

$$=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$ ← この公式も使えるようにしましょう。計算が楽です。

例11)

(1) $3x^2-9x+2=0$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{9\pm\sqrt{57}}{6}$$ 解の公式の利用

(2) $5x^2+\underbrace{6x}_{2\times3}-1=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot(-1)}}{5}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{14}}{5}$$

$ax^2+2b'x+c=0$

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$ を利用

2次方程式の解の個数は

i) $b^2-4ac>0$ (正) のとき $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の2つの実数解

例11)の(1) $x=\frac{9+\sqrt{57}}{6}$, $\frac{9-\sqrt{57}}{6}$

ii) $b^2-4ac=0$ のとき $x=\frac{-b}{2a}$ の1つ。この解を重解という。

例) $x^2+4x+4=0$ ← これは

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$

$$=\frac{-4}{2}$$

$$=-2$$

$(x+2)^2=0$

$x=-2$ と解く。

重解のときは、必ず $(\sim)^2=0$ と因数分解できる

iii) $b^2-4ac<0$ (負) のとき 解はなし。← $\sqrt{\ }$ の中に負の値は入らない

この b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式といい D で表す

以上から

判別式 $D>0$ ⟺ 異なる2つの実数解

判別式 $D=0$ ⟺ ただ1つの実数解をもつ(重解)

判別式 $D<0$ ⟺ 実数解をもたない

例12)

$x^2-5x+3=0$ の判別式をDとすると

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3$$
$$=25-12$$
$$=13$$ 正

よって. 異なる2つの実数解をもつ