2. 空間のベクトル

A. 空間のベクトル

空間のベクトル

↳ 空間内の有向線分で、位置は考えず
向きと大きさだけを考えたもの。

有向線分 AB で表されるベクトル …… $\overrightarrow{AB}$ と書く。

2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が等しい … $\vec{a} = \vec{b}$

向きが同じ & 大きさが等しい

空間のベクトルの加法、減法、実数倍、単位ベクトル、逆ベクトル、ゼロベクトルなどは平面上のベクトルと同様に定義される。

← P7～11 に平面のときの定義があるので、忘れた人はもどって確認しましょう。

空間ベクトルの計算法則

1. 交換法則 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
   結合法則 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
2. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
3. k, l を実数とするとき
   $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$, $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
   $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

← これらの法則も平面上のベクトルのときと同じ!

空間ベクトルの平行

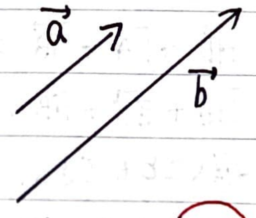
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある

← $\vec{b}$ は $\vec{a}$ を $|k|$ 倍に引きのばしたり縮めたりしたものと考えればいいよ!

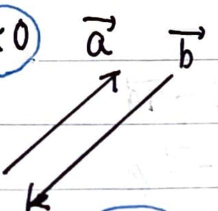
絶対値

$k > 0$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きは同じ

$k < 0$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は逆向き。

No.

Date

神熱

空間ベクトルの和，差，ゼロベクトル，逆ベクトルの性質

1 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$　　2 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ まえうしろ

3 $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$　　4 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

← 1は～～が同じとき使える。
例えば $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}$ なども OK！
ちょうど～～部分がしりとりになっているよ。

2は平面のときにもよく出てきたやつだね！
$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ や
$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ のように
「うしろ－まえ」の形で使うよ。

例2.

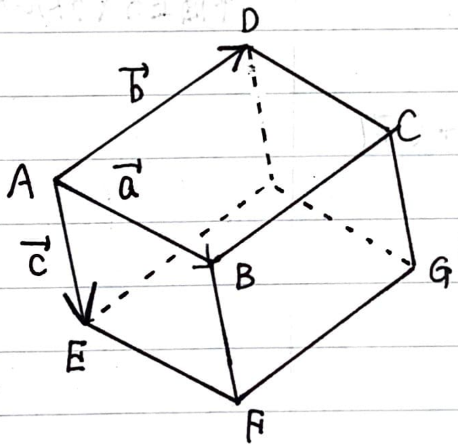
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$$
$$=\{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\}+\overrightarrow{DA}$$
$$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DA}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}\ //$$

「AからBへ行ってBからCへ行ってCからDへ行ってDからAへ行くと最終的にどんなベクトルになるのですか？」ということ。
結局Aにもどってきて動いていないことと同じだよね。

平行六面体…向かいあった3組の面が，それぞれ平行であるような六面体，これら6つの面はすべて平行四辺形（下図）

← 空間のベクトルではよく出てくる図形なのできちんと知っておこう。

例3



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$
$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$
$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}\ //$

(2) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ //$

(3) $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EA}$
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\ //$

← 注 途中の計算方法は1通りだけではない。
例えば (3) なら
$\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$ とか
$\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$ などから
導くこともできる！

B. ベクトルの分解

4点 O, A, B, C は同じ平面上にないとし,

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

とする。このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は次の形にただ1通りに表される。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad (s, t, u: 実数)$$

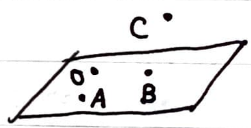
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を使った他の表し方は絶対にない!

証明（図は教P56を参照）

$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ となる点Pをとる。3点 O, A, B の定める平面を α とし，Pから OC に平行な直線を引き，平面 α との交点をQとすると

$$\vec{p} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \quad \cdots\cdots ①$$

← 4点 O, A, B, C は同じ平面上にないが，3点なら同じ平面上にあるとみれる。



ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でないから，平面 α 上で考えると

$$\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t: 実数) \cdots ②$$

の形にただ1通りに表すことができる。

教P14を使ったよ。

また $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{OC}$ であるから

$$\overrightarrow{QP} = u\vec{c} \quad (u: 実数) \cdots ③$$

とただ1通りに表すことができる。

教P54を使ったよ。

①, ②, ③ より $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ $(s, t, u: 実数)$ と表される //

No.

Date

3 ベクトルの成分

A. ベクトルの成分

座標空間の原点をOとし、ベクトル$\vec{a}$に対し $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ となる点Aをとり、Aの座標を (a_1, a_2, a_3) とする。

← 空間の点の座標はこのように第3の座標が登場するよ。

また、3つの点 E(1, 0, 0), F(0, 1, 0), G(0, 0, 1) をとり、$\vec{e_1}=\overrightarrow{OE}$, $\vec{e_2}=\overrightarrow{OF}$, $\vec{e_3}=\overrightarrow{OG}$ とする。

さらに $H(a_1, 0, 0)$, $K(0, a_2, 0)$, $L(0, 0, a_3)$ をとると

← 教P57の図を確認しよう。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}\\
&= a_1\overrightarrow{OE}+a_2\overrightarrow{OF}+a_3\overrightarrow{OG}\\
&= a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}
\end{aligned}
$$

となる。

$\vec{e_1}$ … x軸に関する基本ベクトル
$\vec{e_2}$ … y軸 〃
$\vec{e_3}$ … z軸 〃

a_1, a_2, a_3 … ベクトル$\vec{a}$の成分

x成分　y成分　z成分

← z成分以外の2つは平面のときと同じ言い方です。

※ 空間のベクトルの表し方(2通り)

基本ベクトル表示 … $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e}$

成分表示 … $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$

表し方も平面とほとんど同じで z成分のところが追加されただけです。

※ 基本ベクトル、ゼロベクトルの成分表示

$\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$.

$\vec{0}=(0, 0, 0)$.

No.

Date

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ について

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

← ベクトルが等しいということは x成分どうし、y成分どうし z成分どうし がそれぞれ等しいというイミ。

空間ベクトルの大きさ

空間ベクトル $\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ と書き表す。

2本線忘れずに!

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ に対し

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

← 平面ベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$ のときは $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ だった。似てるね。

B. 成分によるベクトルの演算

神熱

成分によるベクトルの演算(和.実数倍)

1 $(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

2 $k(a_1, a_2, a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ k: 実数

← 計算のやり方はこれまた平面のときと同じ。z成分のところが増えただけ!

k. l を実数として、上の 1 と 2 をまとめて計算すると、次のようになる。

$k(a_1, a_2, a_3)+l(b_1, b_2, b_3)=(ka_1+lb_1,\ ka_2+lb_2,\ ka_3+lb_3)$

特に $k=1$. $l=-1$ のとき

$(a_1, a_2, a_3)-(b_1, b_2, b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

問3 $\vec{a}=(1, -2, 3)$. $\vec{b}=(-1, 3, -2)$

← 問3 (1). (4) だけ 上の演算を使ってやってみるよ!

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1, -2, 3)+(-1, 3, -2)$

$=(1+(-1),\ -2+3,\ 3+(-2))=(0, 1, 1)$ //

大きさは $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$ //

(4) $-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(1, -2, 3)+2(-1, 3, -2)$

$=(-3, 6, -9)+(-2, 6, -4)$

$=(-5, 12, -13)$ //

大きさは $|-3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+12^2+(-13)^2}$

$=\sqrt{338}=13\sqrt{2}$ //

← マイナスのところは( )つける!

← $338=2\times13^2$

No.

Date

問4. $(6,1,5)=s(1,2,3)+t(1,-1,0)+u(-1,3,4)$

$=(s,2s,3s)+(t,-t,0)+(-u,3u,4u)$

$=(s+t-u,\ 2s-t+3u,\ 3s+4u)$.

よって $\begin{cases} s+t-u=6 \\ 2s-t+3u=1 \\ 3s\quad\ +4u=5 \end{cases}$

これを解いて $s=3,\ t=2,\ u=-1$ なので

$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ //

← 問4. 練習11に対応する問題が 黄チャート数B P414にある. 確認しましょう.

← 連立3元1次方程式 昨年習ったね.

← 問題の答えとなるように書き表そう.

C. 点の座標とベクトルの成分.

神熱

$\overrightarrow{AB}$の成分と大きさ

2点 $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ について

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

← 成分の計算は うしろ − まえ

大きさは書き方がちがうけれど 2点間きょりの公式と同じ使い方.

例4 $A(2,1,4)$, $B(3,-1,5)$ について

$\overrightarrow{AB}=(3-2,\ -1-1,\ 5-4)$

うしろ まえ うしろ まえ うしろ まえ

$=(1,-2,1)$ //

大きさは $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$ //

練習13のヒント.

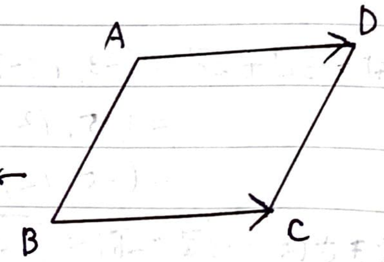
Dの座標を (x,y,z) としよう. 四角形ABCDが平行四辺形になるときは, 平行四辺形の性質

「1組の向かいあう辺の長さが等しくて平行」

を考えよう. これは $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ をイミするね.

あとは $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ を成分で表して, x,y,z の方程式を解けば…

←



のようなイメージができればよい.

黄チャート数B P415も確認!