第2節

4. 剰余の定理と因数定理

A. 剰余の定理

以下、xの整式を$P(x)$, $Q(x)$などと書く。$P(x)$に$x=k$を代入したときの値を$P(k)$と書く。

← 例. $P(x)$に$x=1$を代入したときの値 … $P(1)$
$P(x)$に$x=-2$を代入したときの値 … $P(-2)$

整式$P(x)$をxの1次式$x-k$で割った商が$Q(x)$
余りがRであることは、次の等式で表される。

$$\underbrace{P(x)}_{\text{割られる式}} = \underbrace{(x-k)}_{\text{割る式}}Q(x) + R \quad (R\text{は定数})$$

← 教P15で$A=P(x)$, $B=x-k$, $Q=Q(x)$と考えたもの。余りは割る式$x-k$の次数1より小さいので0、つまり定数である

両辺に$x=k$を代入すると

左辺 $= P(k)$

右辺 $= (k-k)Q(k)+R$
$= 0 \times Q(k) + R$
$= R$

つまり $P(k)=R$.

剰余(じょうよ)の定理
整式$P(x)$を1次式$x-k$で割った余りは$P(k)$

注 $x-k$の$-k$につられて$P(-k)$を計算しないこと!

例12.

(1) $P(x)=x^3-2x^2+3$を$x-1$で割った余り
→ $x=1$を代入して $P(1)=1^3-2\cdot1^2+3=1-2+3$
$=2$.

(2) $P(x)=x^3+2x^2+x+5$を$x+2$で割った余り
→ $x=-2$を代入して
$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2+(-2)+5$
$=-8+2\cdot4-2+5$
$=-8+8-2+5$
$=3$.

Point
xに何をあてはめるか、パッと出ない人! 次のように考えるといいですよ。例えば左の例12でいうと
(1) $x-1=0$ → $x=1$を代入!
(2) $x+2=0$ → $x=-2$を代入!

Date

例題7 → 動画

応用例題2 → 動画

B. 因数定理

因数定理
整式 $P(x)$ が1次式 $x-k$ を因数にもつ
$\iff P(k)=0$

上により、$P(k)=0$ となれば、$P(x)$ は $x-k$ を因数にもつ、つまり $(x-k)$ でくくることができると考えられる(例14参照)。$P(k)=0$ とならなければ、$P(x)$ は $(x-k)$ でくくることができない。

例13　$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ において、
$P(2)$ を計算する。$x=2$ を代入して
$P(2)=2\cdot2^3-5\cdot2^2+2+2=16-20+2+2=0$
よって、整式 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

例14　x^3-4x^2+x+6 の因数分解
$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とする。
($P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4\neq0$ より
$P(x)$ は $x-1$ を因数にもたない)
次に、例えば $P(-1)$ を考えると
$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+(-1)+6=0$ より
$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。よって
$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$　ここでおわらないこと!
x^2-5x+6 はさらに因数分解できるので
$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$.

←「$P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ」とは
「$P(x)$ が $x-k$ で割り切れる」
「$P(x)$ を $x-k$ で割ると余りが0」
と同じことである。つまり因数定理は前ページの剰余の定理の特別な場合である。

←どこから「$x=2$ を代入する」という考えが出てきたかは正直たまたまである。とにかく色々試すことが大切。

←実際は(　　)の部分は答案に必要ない! ここでは因数定理の正しい使い方を補足するためにつけ加えたよ。

←授業で解説します。教P53のような割り算で x^2-5x+6 を求めてもよいです。

研究　組立除法

剰余の定理が難しいなあ… という人は、次の組立除法という機械的な計算で商と余りを求めることもできる。

① 割られる式の各項の係数を順にぬき出して左から並べる。

例. $2x^3-3x^2+5$

⋮

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 0 & 5 \end{array}$$

← $2x^3-3x^2+5$ を $2x^3-3x^2+0x+5$ と考えて係数 0 もふくめて書く。

② ①の右側に └ を書き、その中に剰余の定理で述べられている k の値を書き入れる。

例. $2x^3-3x^2+5$ を $x-1$ で割るとき

⋮

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

← └ の中には $k-1=0$ つまり $k=1$ を書く。

③ 1行あけて線を引き、左の数をそのまま下ろしてくる。

例

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 5 & 1 \\ & & & & \\ \hline 2 & & & & \end{array}$$

④ 下ろした数と └ の中の数をかけてその計算結果をななめ右上に記入し、上下で足す。

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 5 & 1 \\ & 2 & & & \\ \hline 2 & -1 & & & \end{array}$$

上下でたす

← $2\times1=2$

← $(-3)+2=-1$

裏につづく。

⑤ ④の操作をくり返し、一番右の列が埋まるまで行う。

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & 0 & 5 & 1 \\
 & 2 & -1 & -1 & \\
\hline
2 & -1 & -1 & \boxed{4} &
\end{array}
$$

← 一番右が余りを表す。

⑥ ———— の下側から商と余りを求める。

商 $2x^2-x-1$，余り 4 //

← 余り の左側は、商の各次数の係数を表している。

例1　x^3-4x^2+x+6 を $x+1$ で割った商と余りを組立除法で求める。

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\
 & -1 & 5 & -6 & \\
\hline
1 & -5 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

← $x+1=0$ より ∟ の中には $x=-1$ を書き入れる。

よって商 x^2-5x+6，余り 0 //

5. 高次方程式

A. 高次方程式の解き方 (1)

高次方程式 … 3次以上の方程式をまとめてこのようにいう

← 3次方程式, 4次方程式
5次方程式 ....
.... n次方程式

例題8 → 動画

3乗すると a になる数 … a の 3乗根

← $x^3 = a$ となる数 x のこと

例題9 → 動画

例題8, 9 のように因数分解の公式を利用して, 因数分解できれば, あとは各因数の方程式を解けばよい.
次に, 因数分解の公式が利用できないときの, 高次方程式の解き方について考えよう.

← 高次方程式を解く流れで重要なまとめです. きちんとおさえましょう.

B. 高次方程式の解き方 (2)

因数分解の公式以外で解く方法
→ 教 P53 で学習した因数定理!

← 因数定理を使って因数分解する方法を学習したので, あとは各因数の方程式を解けばよい.

例題10 → 動画

例えば, 方程式 $(x-1)^2(x+2)=0$ の解は $x=1, -2$ であるが, このうち $x=1$ を 2重解という. 同様に $(x-1)^3(x+2)=0$ の解 $x=1, -2$ のうち, $x=1$ を 3重解という. 重解は普通区別せず, 1個としてカウントするが, 重解を区別してカウントする立場をとる. つまり 2重解は 2個, 3重解は 3個 … のようにカウントすることにすると, n次方程式は複素数の範囲で, n個の解をもつ (事実).

← $x=1$ (2重解), -2 なら 2個
$x=1$ (2重解), 2, -1 なら 3個
$x=1, 2$ (3重解), -1 なら 3個
というようなカウント.

C. 高次方程式と虚数解

$\boxed{\text{応用例題3}}$ → 動画

注 教科書にもあるように、応用例題3の2つの解

$1+2i$, $1-2i$

は互いに共役な複素数である。一般に係数が実数であるn次方程式の解の1つが $a+bi$ ならば、それと共役な複素数 $a-bi$ も解である。

← 練24〜27で虚数解になっているものを見てみましょう。たしかに ―― のようになってないかな？

補足「共役な複素数もまた解である」のはなぜ？

複素数 $\alpha=a+bi$ と共役な複素数 $\overline{\alpha}=a-bi$ について，次の性質が成り立つ。

α, β を複素数とすると

1　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$,　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

2　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$,　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

3　$\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$　（n は自然数）

4　k が実数のとき　$\overline{k}=k$,　$\overline{k\alpha}=k\overline{\alpha}$

証明▶$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ とする。

（2 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ について）

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$=(ac-bd)-(ad+bc)i$$
$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)}=(a-bi)(c-di)$$
$$=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

よって　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$

1，2の他の式も，同様に証明される。

（3について）

上の結果を用いて　$\overline{\alpha^n}=\overline{\underbrace{\alpha\alpha\cdots\cdots\alpha}_{n\text{個}}}=\underbrace{\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}\cdot\cdots\cdots\cdot\overline{\alpha}}_{n\text{個}}=(\overline{\alpha})^n$

（4について）

$k=k+0i$ であるから　$\overline{k}=k-0i=k$

これと2を用いて　$\overline{k\alpha}=\overline{k}\cdot\overline{\alpha}=k\overline{\alpha}$

上の性質を用いると，―― の部分が証明できる。

実数係数の n 次方程式が虚数解 α をもつならば，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

証明▶例えば，実数 a, b, c, d を係数とする3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ …… ① が虚数解 α をもつとき

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

両辺の共役な複素数を考えて

$$\overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0}\qquad\text{また}\qquad\overline{0}=0$$

性質1から　$\overline{a\alpha^3}+\overline{b\alpha^2}+\overline{c\alpha}+\overline{d}=0$

a, b, c, d は実数であるから

性質4から　$a\overline{\alpha^3}+b\overline{\alpha^2}+c\overline{\alpha}+d=0$

性質3から　$a(\overline{\alpha})^3+b(\overline{\alpha})^2+c\overline{\alpha}+d=0$

この等式は①に $x=\overline{\alpha}$ を代入したものであり，方程式①が $\overline{\alpha}$ を解にもつことを示している。4次方程式以降も同様の計算で証明できる。//

← 4次方程式なら
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$
5次方程式なら
$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$
などとして同じような計算をする。

前ページの☆を使うと、応用例題3は次のように解くこともできる。ここでは1つ別解を紹介する。

← 他にも別解はたくさんあるよ!

応用例題3 別解

与えられた方程式は実数を係数とし、今 $1+2i$ を解にもつから、共役な複素数 $1-2i$ も与えられた方程式の解である。この2解をもつ2次方程式の1つは

$$(1+2i)+(1-2i)=2,\quad (1+2i)(1-2i)=5$$

より $x^2-2x+5=0$ であるから、与えられた3次方程式の左辺は $(x^2-2x+5)(x+c)$ (cは定数)と因数分解されることになる。よって

$$x^3+ax+b=(x^2-2x+5)(x+c)$$

$$x^3+ax+b=x^3+(c-2)x^2+(5-2c)x+5c$$

各項の係数を比較して

$$0=c-2,\quad a=5-2c,\quad b=5c$$

よって $c=2,\ a=1,\ b=10$.

$c=2$ より $(x^2-2x+5)(x+2)=0$ を解くと、残り1つの解は $x=-2$.

答. $a=1,\ b=10$, 他の解: $-2,\ 1-2i$

← ―― 部分は記述が必要である。前ページの☆の書き方に合わせるためである。

← 3次方程式で、2次式の部分はわかったので、1次式は $x+c$ とした。xの係数が1であることはすぐにわかるが、定数項は c とした。

← 2つの解を求める必要があったが、そのうちの1つ $1-2i$ は初めに求めているので、あとは残りの1つだけ。