問・練習（第２節）

練習２６

(1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(4) $\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

別解 $\sin 165^\circ = \sin(135^\circ + 30^\circ)$

$= \sin 135^\circ \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

練習２７

$\sin \dfrac{7}{12}\pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos \dfrac{7}{12}\pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

練習２８

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であるから

$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta < 0$

ゆえに

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$

(1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) - \dfrac{\sqrt{5}}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{6+4\sqrt{5}}{15}$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{8+3\sqrt{5}}{15}$

練習２９

(1) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$= \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$= \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$= 2-\sqrt{3}$

別解 $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$ を利用すると

$\tan 15^\circ = \tan(90^\circ - 75^\circ) = \dfrac{1}{\tan 75^\circ} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= 2-\sqrt{3}$

(2) $\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$

$= -2-\sqrt{3}$

別解 $\tan 105^\circ = \tan(90^\circ + 15^\circ) = -\dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

$= -\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$

(3) $\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \dfrac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ}$

$= \dfrac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$

練習３０

(1)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$

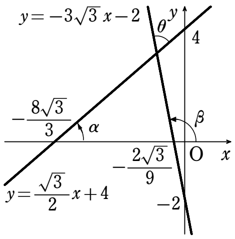
(2)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<\alpha+\beta<\pi$

よって　　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$

練習３１

2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を順に α，β とする。

(1)　右の図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\beta-\alpha$ である。



$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

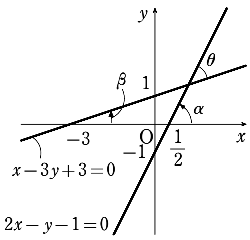
$\tan\beta=-3\sqrt{3}$

であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{-3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-3\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(2)　右の図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。



2 直線の方程式は

$y=2x-1$，

$y=\dfrac{1}{3}x+1$

と変形されるから

$$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\dfrac{1}{3}$$

よって　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=1$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

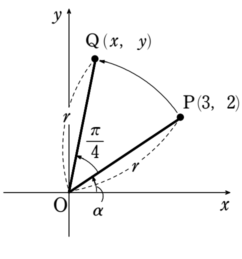
(p.143) 研究　練習１

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{OP}=r$ とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$3=r\cos\alpha$，$2=r\sin\alpha$

また，$\mathrm{OQ}=r$ で，動径 OQ と x 軸の正の向きとのなす角は $\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ であるから



$$x=r\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right),\ \ y=r\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$$

加法定理により

$$x=r\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-r\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$$

$$=3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y=r\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+r\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$$

$$=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$$

したがって，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$