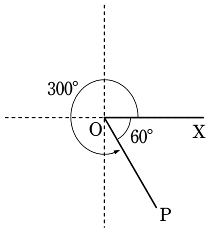
第４章　三角関数

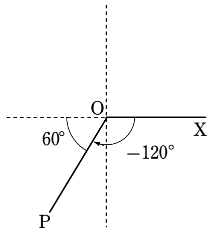
問・練習（第１節）

練習１

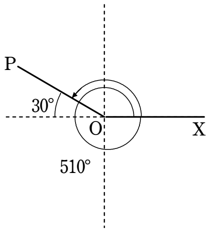
(1)



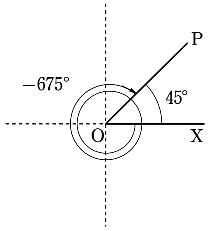
(2)



(3)



(4)



練習２

$240^\circ=240^\circ+360^\circ\times 0$，$600^\circ=240^\circ+360^\circ\times 1$，
$780^\circ=60^\circ+360^\circ\times 2$，$-60^\circ=300^\circ+360^\circ\times(-1)$，
$-300^\circ=60^\circ+360^\circ\times(-1)$，$-420^\circ=300^\circ+360^\circ\times(-2)$
よって，求める角は　780°，-300°

練習３

(1) $\dfrac{\pi}{180}\times 15=\dfrac{\pi}{12}$

(2) $\dfrac{\pi}{180}\times 210=\dfrac{7}{6}\pi$

(3) $\dfrac{\pi}{180}\times(-240)=-\dfrac{4}{3}\pi$

(4) $\dfrac{\pi}{180}\times 315=\dfrac{7}{4}\pi$

練習４

(1) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{5}{4}\pi=225$　　ゆえに　225°

(2) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{8}{5}\pi=288$　　ゆえに　288°

(3) $\dfrac{180}{\pi}\times\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)=-450$　　ゆえに　-450°

(4) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{5}{12}\pi=75$　　ゆえに　75°

練習５

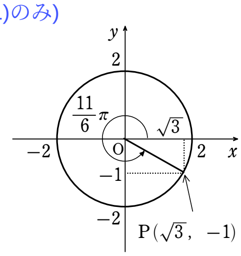
弧の長さを l，面積を S とする。

(1) $l=4\cdot\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{4}{5}\pi$，　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{8}{5}\pi$

(2) $l=6\cdot\dfrac{5}{6}\pi=5\pi$，　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\dfrac{5}{6}\pi=15\pi$

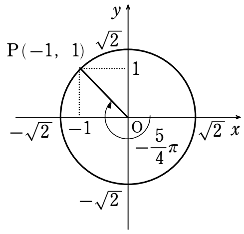
練習６ ☛解説動画は こちら((1)のみ)

(1) $\dfrac{11}{6}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が 2 の円との交点を P とすると，P の座標は $(\sqrt{3},\ -1)$ である。よって



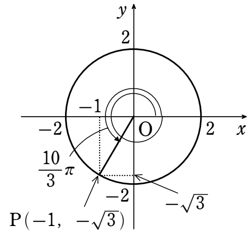
$$\sin\frac{11}{6}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{11}{6}\pi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-\dfrac{5}{4}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円との交点を P とすると，P の座標は $(-1,\ 1)$ である。よって



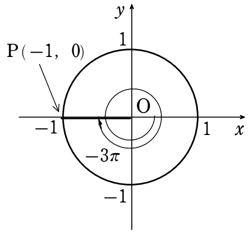
$$\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-1$$

(3) $\dfrac{10}{3}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が 2 の円との交点を P とすると，P の座標は $(-1,\ -\sqrt{3})$ である。よって



$$\sin\frac{10}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{10}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{10}{3}\pi=\sqrt{3}$$

(4) -3π の動径と，原点を中心とする半径が 1 の円との交点を P とすると，P の座標は $(-1,\ 0)$ である。よって



$$\sin(-3\pi)=0$$
$$\cos(-3\pi)=-1$$
$$\tan(-3\pi)=0$$

練習７ ☛解説動画は こちら

θ の動径が第 4 象限にあるから　$\sin\theta<0$
よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{12}{13}\right)\div\frac{5}{13}=-\frac{12}{5}$$

問１
$\tan\theta<0$ から，θ の動径は第 2 象限か，または第 4 象限にある。

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(-2)^2=5$

よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

θ の動径が第 2 象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

θ の動径が第 4 象限にあるとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

練習８　☛解説動画は こちら
$\tan\theta>0$ から，θ の動径は第 1 象限か，または第 3 象限にある。

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$

よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$

θ の動径が第 1 象限にあるとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

練習９　☛解説動画は こちら (1)　(2)

(1)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$
$\quad-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=2\sin^2\theta+2\cos^2\theta=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\cdot1=2$

(2)　$\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta$
$=\tan^2\theta+(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta$
$=\tan^2\theta+(1-\tan^2\theta)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta=1$

別解　$\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta$
$=\tan^2\theta+\cos^2\theta-\tan^4\theta\cos^2\theta$
$=\tan^2\theta+\cos^2\theta-\tan^2\theta\sin^2\theta$
$=\tan^2\theta(1-\sin^2\theta)+\cos^2\theta$
$=\tan^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

練習１０　☛解説動画は こちら (1)　(2)

(1)　$\sin\theta-\cos\theta=a$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$$

よって　　$1-2\sin\theta\cos\theta=a^2$

ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-a^2}{2}$

(2)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$
$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$
$=a\left(1+\dfrac{1-a^2}{2}\right)=\dfrac{a(3-a^2)}{2}$

練習１１　☛解説動画は こちら

(1)　$\sin\dfrac{8}{3}\pi=\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\pi\right)=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\cos\dfrac{13}{2}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

(3)　$\tan\dfrac{17}{4}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+4\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

練習１２　☛解説動画は こちら

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

練習１３　☛解説動画は こちら

$\sin\dfrac{5}{4}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\dfrac{7}{6}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\dfrac{7}{6}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

問２

３′　$\sin(\pi-\theta)=\sin\{\pi+(-\theta)\}=-\sin(-\theta)$
$\qquad=-(-\sin\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=\cos\{\pi+(-\theta)\}=-\cos(-\theta)$
$\qquad=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=\tan\{\pi+(-\theta)\}=\tan(-\theta)$
$\qquad=-\tan\theta$

４′　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}=-\sin(-\theta)$
$\qquad=-(-\sin\theta)=\sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left\{\dfrac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}=-\dfrac{1}{\tan(-\theta)}$
$\qquad=-\dfrac{1}{-\tan\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

練習１４　☛解説動画は こちら

$$\sin\frac{19}{6}\pi=\sin\left(\frac{7}{6}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{20}{3}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+6\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$