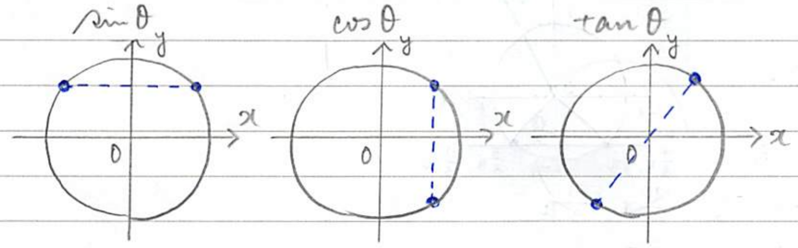
Date . . No.

5. 三角関数の応用

＜方程式＞



y軸対称な点が同じ値をとる　　x軸対称な点が同じ値をとる　　原点対称な点が同じ値をとる.

例　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

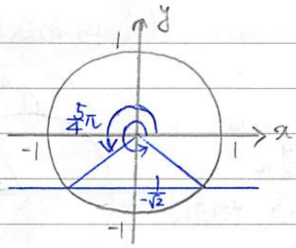
$\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$ を解け.

解）

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

図より

$\theta = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ //



→ θの範囲に制限がないときは.
$\theta = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$
（n：整数）

ついつい例は.
sinが多いですが.
$\cos\theta, \tan\theta$ でも同じ!!

⇨ Ex.19, 20

先に数P135を説明します

例　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け　（Tx. P135 応用例題1）

$\boxed{\theta + \frac{\pi}{3} = X}$ とおく

$\sin\boxed{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{X} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

…　でホントにok?

Point　Xの範囲に注意.

$\frac{\pi}{3} \leqq \boxed{X} < \frac{7}{3}\pi$ より $\boxed{X} = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$　$\cancel{\frac{\pi}{4}}$ 範囲外!!

よって. $\theta =$ ～～～

解）$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

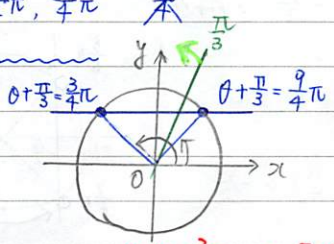
$\frac{\pi}{3} \leqq \boxed{\theta + \frac{\pi}{3}} < \frac{7}{3}\pi$

このとき

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$

$\theta = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$ //



← $\frac{\pi}{4}$は範囲外

$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi$　$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{9}{4}\pi$

$\theta = \frac{5}{12}\pi$　$\theta = \frac{23}{12}\pi$

⇨ Ex.23.

No. Date

問. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解け.

解) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より

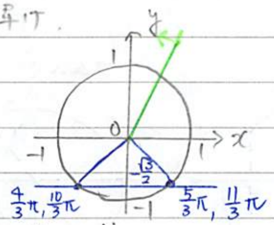
$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$

このとき

$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ //



〈不等式〉

例. (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき.

$\cos\theta > \frac{1}{2}$ を解け　（TX. p134 例題5）

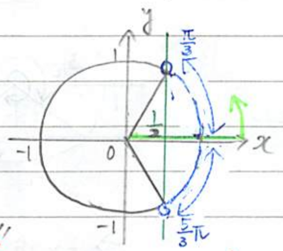
解) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき.

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ の解は

$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

よって. 求める θ の値の範囲は

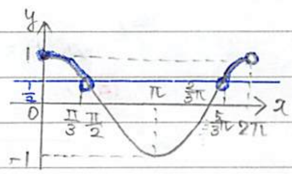
$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$ //



注) $\frac{5}{3}\pi < \theta < \frac{\pi}{3}$ と かく人がたまにいますが 当然ダメですよね

$\cos\theta$ の値が $\frac{1}{2}$ より大きい所を答えればよい

→ 別) グラフで考えてもよい.



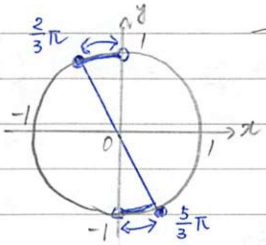
グラフより $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき.

$\tan\theta + \sqrt{3} \leqq 0$ を解け

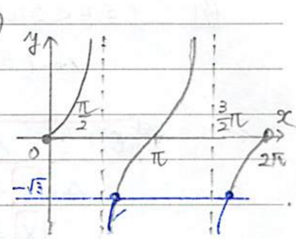
解) $\tan\theta \leqq -\sqrt{3}$ より

$\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$ //



=の有無にも 気をつけよう

→ 別)



⇨ Ex. 21, 22

例 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解け.

解) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

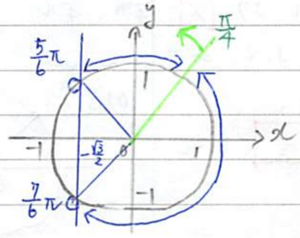
このとき

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi,$

$\frac{7}{6}\pi < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

ゆえに. $0 \leqq \theta < \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi < \theta < 2\pi$



⇨ Ex. 24

Date　　.　　.　　No.

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき．

$2\sin^2\theta + 5\cos\theta \leqq -1$

解）$2\sin^2\theta + 5\cos\theta \leqq -1$

$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta \leqq -1$

種類の統一
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$2\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 \geqq 0$

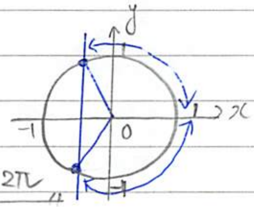
$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 3) \geqq 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

決まっている　$\cos\theta - 3 < 0$ から

$2\cos\theta + 1 \geqq 0$

$\cos\theta \geqq -\frac{1}{2}$



ゆえに．$0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$ //

種類を統一するときは
1次の方を残し，2次の方
変換しましょう！

⇨ CHART 基本例題 124

＜三角関数を含む関数＞

応用例題 2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

…教科書に載っているような
グラフは，数Ⅲになったら
描けるよ！

これまでに学んだ関数の問題をイメージする

$\sin\theta = t$ とおく

$\boxed{y = t^2 + 2t}$　2次関数に帰着する　Point

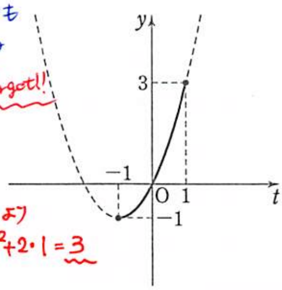
解　$\boxed{\sin\theta = t}$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$

であるから　新しい文字についても変域を考える

$-1 \leqq t \leqq 1$ ……①　Don't forget!!

y を t で表すと

$y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$



① の範囲において，y は

$t=1$　で最大値 3 をとり，　$t=1$ より $y = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

$t=-1$ で最小値 -1 をとる。

また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t=1$ ならば $\theta = \frac{\pi}{2}$，　$t=-1$ ならば $\theta = \frac{3}{2}\pi$

よって，この関数は　tのままではなく θに戻すこと．

$\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 3 をとり，$\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。

⇨ Ex，25

別解

$\sin\theta = t$ と置かずにそのまま進めてもよい

$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$

$= (\sin\theta + 1)^2 - 1$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$\sin\theta = 1$ で最大値，

$\sin\theta = -1$ で最小値をとる

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$

ゆえに

$\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 3

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる //