第2節 加法定理

Date . . No.

6、加法定理

◎ $\cos 75^\circ$ の値をどう求めるか？

└ $\boxed{45^\circ + 30^\circ}$ であることは使えそうだけど…。

~~$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha + \cos\beta$~~ 正しくありません!!

$$\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ$$
$$= 0$$
$$\cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

等しくない!!

⇩

これ!!

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{—①}$$

ホントウにこうなるか、確かめてみましょう！

証明

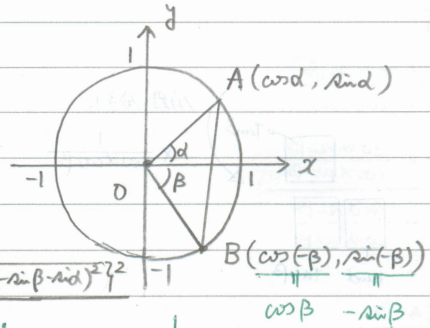
$\triangle OAB$ で

$\angle AOB = \alpha + \beta$

$OA = OB = 1$

$AB = \sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (-\sin\beta - \sin\alpha)^2}$

なので、余弦定理より



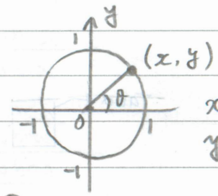
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1^2 + 1^2 - \{\sqrt{(\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (-\sin\beta - \sin\alpha)^2}\}^2}{2\cdot 1\cdot 1}$$

$$= \frac{1+1-(\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha)}{2}$$

$$= \frac{2-2+2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{を得る (終)}$$

㊋ 単位円において



x座標 → $\cos\theta$

y座標 → $\sin\theta$

㊋

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

((というわけで、今回の1つめのテーマ $\cos 75^\circ$ の値の求め方はわかりましたね!))

例

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

①の公式で

$\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$ としている

もちろん、$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$ でもOK!

No. Date

Q 他の加法定理を①から導いてみよう.

(例) ①で $\beta \to -\beta$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$
$\sin(-\beta) = -\sin\beta$

(例) ①で $\alpha \to \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\cos\left(\boxed{\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ 　　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ 　　$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \text{——②}$$

(例) ②で $\beta \to -\beta$

$$\sin\{\underbrace{\alpha-(-\beta)}_{\alpha+\beta}\} = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$
$\sin(-\beta) = -\sin\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(例)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

分母・分子に $\times \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$= \frac{\underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\tan\alpha}\frac{\cos\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\underbrace{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}_{\tan\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\tan\alpha}\underbrace{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}_{\tan\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{——③}$$

(例) ③で $\beta \to -\beta$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\beta) = -\tan\beta$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

第2節の生命線

すごく重要!

まとめ 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

⇨ 練26
練27
練29

コツ
与えられている角を
$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$, $\frac{\pi}{4}(45^\circ)$, $\frac{\pi}{3}(60^\circ)$, …
といった、三角関数の値がわかっている角に分ける!!

例題 6 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ のとき,

$\boxed{\sin(\alpha+\beta)}$ と $\boxed{\cos(\alpha-\beta)}$ の値を求めよ。 → 動画チェック!!

$\cos(\alpha-\beta)=\underline{\cos\alpha}\cos\beta+\sin\alpha\,\underline{\sin\beta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて
$\sin\alpha$, $\cos\beta$ から求める

$\sin(\alpha+\beta)$
$=\sin\alpha\cos\beta+\underline{\cos\alpha}\,\underline{\sin\beta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて
$\sin\alpha$, $\cos\beta$ から求める.

符号に気を付けよう

解 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\cos\alpha<0$, $\sin\beta>0$

ゆえに $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より
$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$
$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

したがって

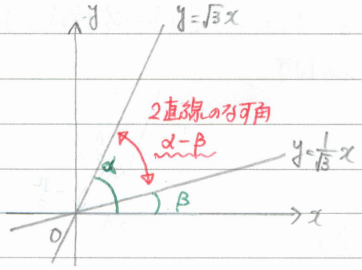
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$$

⇨ 練 28, 30

<2直線のなす角>

問. 2直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ —①, $y=\sqrt{3}x$ —② のなす角θを求めよ. $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$\boxed{\text{直線の傾き} \to \tan\theta}$ (数Ⅱ)



直線①,②と x軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α, β とする.

$\tan\alpha=\sqrt{3}$
$\tan\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2直線①,②のなす角は $\alpha-\beta$ だから

$\boxed{\tan\theta}$ → $\tan(\alpha-\beta)$ を考える

加法定理

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}$

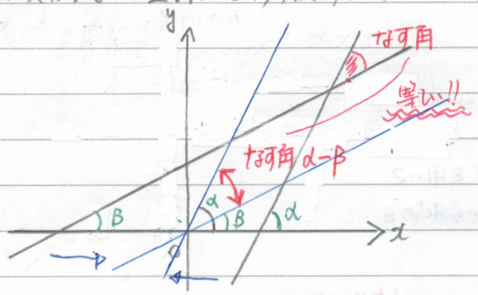
$=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より
$\theta=30^\circ$

No. Date

Q. 原点で交わらない2直線はどう考えますか？ — A. 同じ考え方でよい！



★ 2直線ともが原点を通るように平行移動したらよいですね♪

例題 7 2直線 $y=\boxed{3}x-1$, $y=\boxed{\frac{1}{2}}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。 → 動画チェック!!

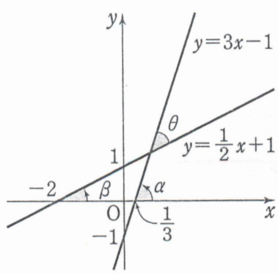
解 右の図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α, β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

ゆえに，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から　$\theta=\frac{\pi}{4}$



注 直線 $x=a$ の x軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}$ です!!

$\tan\theta$ は $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$ では定義されませんが，なす角は定義されます。

⇨ 練31

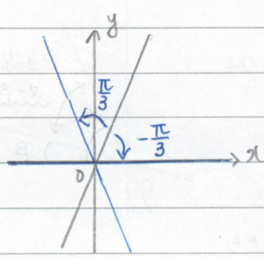
問. 原点を通り，直線 $y=\sqrt{3}x$ と $\frac{\pi}{3}$ の角をなす直線の方程式を求めよ。

解) 直線①と x軸の正の向きとのなす角を α とする

$\tan\alpha=\sqrt{3}$

求める直線の傾きは

$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$



ここで

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\sqrt{3}$$

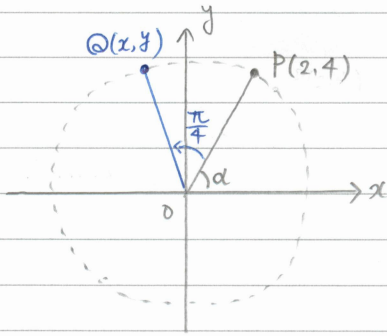
$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}$$
$$=0$$

求める直線は原点を通るので

$y=-\sqrt{3}x$, $y=0$

研究 点の回転

例. 点P(2,4)を、原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点Qの座標を求めよ.



OP=r, OPがx軸の正の部分となす角をαとすると、Pの座標は r, αを用いて

$$P(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$$

と表せる.

これが(2,4)に一致することは あとで使うので 今はガマン!

OQ=rより、Qの座標は同様にして

$$Q\left(r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),\ r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ここで、P(2,4)より

$$r\cos\alpha=2,\ r\sin\alpha=4$$

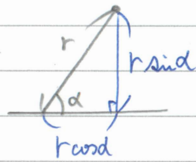
なので

$$\begin{aligned}
&r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= r\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}r\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\alpha\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\\
&= -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= r\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}r\cos\alpha\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

よって $Q(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$

*紹介はするケド、理系の人は複素数平面を勉強するので心配は無用!!



p139 練1 答え

$$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$