7. 加法定理の応用

大事だからもう一度!!

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad ①$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad ②$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad ③$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

倍角の公式, 半角の公式は加法定理からできています.

だからとても大事!

〈2倍角の公式と3倍角の公式〉

◎ ①で $\beta\to\alpha$

$$\underbrace{\sin(\alpha+\alpha)}_{2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

◎ ②で $\beta\to\alpha$

$$\underbrace{\cos(\alpha+\alpha)}_{2\alpha} = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を使うと

$$\to = (1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$$
$$= 1-2\sin^2\alpha$$

$$\to = \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^2\alpha-1$$

◎ ③で $\beta\to\alpha$

$$\underbrace{\tan(\alpha+\alpha)}_{2\alpha} = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

この公式は何となく覚えるのではなく導き方を理解し、いつでも導けるようにする!!

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1-2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

都合にあわせて使い分ける

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

とは言っても、覚えていた方が便利だと思う. 何が言いたいかというと、たくさんある公式を意味もなく覚えるのではなく、本質を理解して頭にたたき込め!! ということ!

導き方はわからない、覚えてもいないは論外!

No. Date . .

◎ ①で $\beta \to 2\alpha$

$$\sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos2\alpha + \cos\alpha\sin2\alpha$$
$$= \sin\alpha\cdot(1-2\sin^2\alpha) + \cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$\cos2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$
$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ $(\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$

◎ ③で $\beta \to 2\alpha$

$$\cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cos2\alpha - \sin\alpha\sin2\alpha$$
$$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - \sin\alpha\cdot2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$
$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$
$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ $(\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$

3倍角の公式は、必要に応じてつくれば十分!!

例題 8 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，$\boxed{\sin2\alpha}$ の値を求めよ。 → 動画をチェック!

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて $\cos\alpha$ から求める.

解 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから $\sin\alpha>0$ ← 符号に気を付けよう

よって $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より
$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

ゆえに $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

⇨ 練32.

＜半角の公式＞

◎ 2倍角の公式 $\cos2\theta = 1-2\sin^2\theta$ で.

$\theta \to \frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

◎ 2倍角の公式 $\cos2\theta = 2\cos^2\theta-1$ で

$\theta \to \frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

◎ $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$= \dfrac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Date　・　・　No.

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

この公式も導き方をしっかり理解しよう

$\frac{\alpha}{2}\to\alpha$に置き換え

注

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

の形も よく使う(上2つ)

特に、この公式の利便性を感じるのは 数III!!

例. $\sin\frac{\pi}{8}$の値を求めよ.

解)

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

← $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$で $\alpha=\frac{\pi}{4}$とする

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

ここで終わらず、2乗をとること!!

$\sin\frac{\pi}{8}>0$より $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

注 この場合は二重根号が簡単にはならないので、そのまま残してよい。

⇨ 練34, 練35

2倍角の公式や半角の公式を使う

<三角関数を含む方程式・不等式>

応用例題 3 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。 → 動画をチェック!!

(1) $\cos 2x=-3\cos x+1$　　(2) $\cos 2x<-3\cos x+1$

解 (1) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

"種類を統一する"という土台となる考え方がある。その過程で、2倍角の公式や半角の公式を使う

$$2\cos^2 x-1=-3\cos x+1$$

移項して整理すると

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

左辺を変形して　$(\cos x+2)(2\cos x-1)=0$

$\cos x\neq -2$ であるから　← $-1\leqq\cos x\leqq 1$ より　前提!!

$2\cos x-1=0$　　すなわち　$\cos x=\frac{1}{2}$

教 p133で学習済

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2) (1)により，与えられた不等式は，次のように変形される。

(1)と同じ形なので省略していますが本来は1つずつ

$\cos 2x<-3\cos x+1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1<-3\cos x+1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2<0$

$\Leftrightarrow (\cos x+2)(2\cos x-1)<0$

と変形していきます。

$$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$$

$\cos x+2>0$ であるから

$2\cos x-1<0$　　すなわち　$\cos x<\frac{1}{2}$

$A\times B<0$のとき $A>0, B<0$ または $A<0, B>0$の2つが考えられますが この場合は $\cos x+2>0$より $2\cos x-1<0$と断定できます。

教 p134で学習済

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

⇨ 練36, CHART p202 基本例題132(2)