

8. 三角関数の合成

$$2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{\text{加法定理}}{=} \sin\theta + \sqrt{3} \cos\theta$$

どう考えるか。

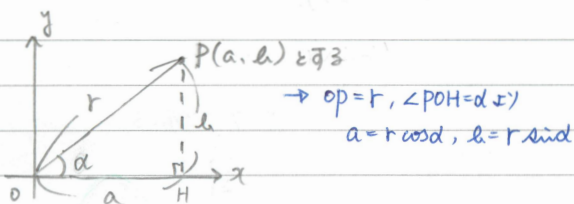
⑧ $\sin\theta + \Delta \cos\theta$ を $\sin$ の形で表現する方法を考えよう問. $\sin\theta + \sqrt{3} \cos\theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形しよう。

解)

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\theta + \sqrt{3} \cos\theta}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta \right) \\ & \quad \downarrow \omega\theta = \frac{1}{2} \text{ とおす} \quad \downarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ とおす} \\ & \quad \theta \text{ は?} \quad \theta \text{ は?} \\ & \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{共通する方を選ぶ} \\ & \quad \frac{5}{3}\pi \quad \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin\theta + \sin \frac{\pi}{3} \cos\theta \right) = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

一般に...



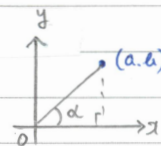
$$\begin{aligned} & a \sin\theta + b \cos\theta \\ &= r \cos \alpha \cdot \sin\theta + r \sin \alpha \cos\theta \\ &= r \sin(\theta + \alpha) \\ & \quad \downarrow \equiv \text{平方の定理} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

三角関数の合成

$$\begin{aligned} & a \sin\theta + b \cos\theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

T=E.L

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

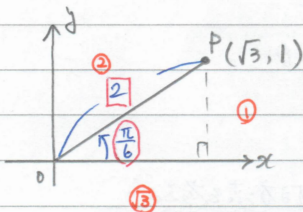


この書き方をわかりに... と思うのぞ。

次の例を示します!!

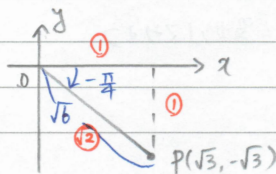
例① $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$
 $\downarrow$
 $(\sqrt{3}, 1)$

$= 2\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$



② $\sqrt{3}\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$
 $\downarrow$
 $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$= \sqrt{6}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$



考え方

① $\sin\theta$ の係数をx座標, $\cos\theta$ の係数をy座標と考える点Pをとる

② OPの長さ & OPとx軸の正の方向からなす角を求める
(直角三角形OPHをつくらせよ)

③ $\sin(\theta + \text{②})$ と変形させる
 $\uparrow$ $\uparrow$
 OPの長さ 角

③ $3\sin\theta + 2\cos\theta$
 $\downarrow$
 $(3, 2)$ 角が何かわからない...

$= \sqrt{13}\sin(\theta + d)$

ただし, $\cos d = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin d = \frac{2}{\sqrt{13}}$

αを求められないときは
このように書く!!

知識不足を除いて

合成を利用せよ

⇒ 練習37

<三角関数の合成・方程式・不等式と最大・最小>

例題① $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。(応用問題4) → 動画でチェック

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

解 左辺を変形して

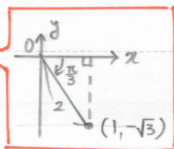
$2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

よって

$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ①

$0 \leq x < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから、①より

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ ゆえに $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi$



忘れないで
p.35
参照

② $0 \leq x < 2\pi$ のとき、不等式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$ を解け

解) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$

$2\sin(x - \frac{\pi}{3}) > 1$

$\sin(x - \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$ ①

$0 \leq x < 2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

このとき①の解は、

$\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$

$x - \frac{\pi}{3} = t$ とおくと、

$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$

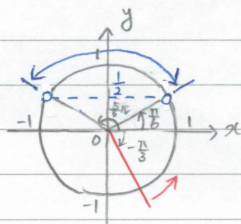
$\sin t > \frac{1}{2}$

を解く。

$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5}{6}\pi$

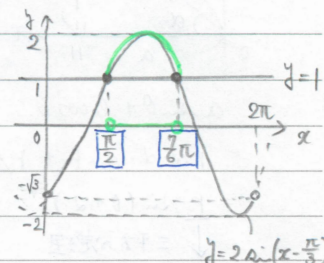
$\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$

の範囲で解く。



⇒ 練習38, 練習39

グラフで考える



$2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ を満たすxの値は

$y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ と $y = 1$ の交点の

x座標と考えることが出来る。

②の不等式だと、 $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ の

グラフで、 $y = 1$ と傾斜にある

xの値の範囲を考えると

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$ と答えられる。

応用
例題

5

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

種類の統一 → 合成する。

$$\begin{aligned} \text{解) } y &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

 $0 \leq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \text{ より}$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ より}$$

$$-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \quad \rightarrow \text{よって 最大値 } \sqrt{2}, \text{ 最小値 } -\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2} \text{ となる } x \text{ は}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = -\sqrt{2} \text{ となる } x \text{ は}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

$$x = \frac{5}{4}\pi$$

ゆえに、

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき 最大値 } \sqrt{2}$$

$$x = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき 最小値 } -\sqrt{2}$$

→ 練習40, 練習41,

CHART p205 基本例題135(2)

CHART p206 基本例題136

入門レベルと12は、
とてもよくできた問題です!この作業が大変なのは、
必要があるときだけだよ。考え方は、例135で学習済入門レベルと12は、
とてもよくできた問題です!

point

三角関数の式変形のコツ

① 基本は 種類を統一すること!!

そのために、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \dots \text{一方の2乗のときはこれ!!}$$

・ 2倍角の公式

$$\dots \sin \theta, \sin 2\theta, \dots \text{とバラバラのときはこれ!}$$

・ 3倍角・和・積の公式

二もどろろ!!

・ 合成

 $\dots \sin \theta$ も $\cos \theta$ も 次数が同じときはこれ!!② 文字の置きかえ $\leftarrow$ 新しく置きかえた文字のとりうる値の範囲の

チェックを忘れずに!!

$$\bullet \sin(\dots)$$

とせ A など別の文字で置くとイメージしやすい。

$$\bullet \sin \theta + \cos \theta = t \text{ とおく もよく使う}$$

③ 次数下げは 半角の公式で!!

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\textcircled{4} \text{ 意外と忘れやすい } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

問題が出てくるのは

サインとコサインがタカハチ

またタンジェントも出ます

また、タンジェントは基本は

"直線の傾き"と 相互関

係が対応できるので、

あわてないうちに、