No. 数Ⅱ

Date . .

2. 2次方程式の解

A. 2次方程式 $x^2=k$ の解

2次方程式 $x^2=k$ の解

複素数の範囲では、2次方程式 $x^2=k$ は実数 k の符号に関係なく解をもち、その解は $x=\pm\sqrt{k}$

← $k\geqq 0$ なら今まで通り.

例 $x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

$x^2=0 \Rightarrow x=0$

でも、前ページで考えた負の数の平方根を導入することで、今までは「解なし」と答えていたものもある意味 $x=\pm\sqrt{k}$ という解があるととらえられるようになったよ.

例8 $x^2=-12$ の解は (-12 の平方根なので)

$$x=\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}\,i=\pm2\sqrt{3}\,i$$

まず i に直す!

B. 解の公式

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

← これで3回目の登場です.
まだ覚えてない人! ちゃんと覚えましょう.

とくに x の係数が偶数であるような2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

← 上の解の公式で $b=2b'$ のとき.
初めから約分されているので少し計算はラク.

※ 上の解の公式の使い方は高1のとき学習したときとほとんど変わらない. 変わったところは、もし $\sqrt{\quad}$ の中が負だったときに、今までは「解なし」と答えていたところが i に直して具体的に解をかくようになったところだけである. 次のページでこのことを確認しよう.

← $\sqrt{\quad}$ の中が正ならば高1のときと完全に同じ.

No.

Date

例9　2次方程式 $3x^2-7x+5=0$ を解く.

解の公式で $a=3$, $b=-7$, $c=5$ として

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times3\times5}}{2\times3}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$$

i に直す!

← この例では $\sqrt{\ }$ の中が負になったので i に直す必要があったけれど, $\sqrt{\ }$ の中が正ならばその必要はないので $\sqrt{\ }$ の中の数は毎回注意しよう.

C. 2次方程式の解の種類の判別

実数解 … 方程式の解のうち, 実数であるもの

虚数解 … 方程式の解のうち, 虚数であるもの

上の例9のように虚数単位 i を使って書かれた解のこと.

← 高1までに考えてきた方程式の解はすべて実数解の意味でとらえているよ.

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 … $D=b^2-4ac$

← $\sqrt{\ }$ の中の数. 高1で学習したよ.

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と, その判別式 $D=b^2-4ac$ について, 次が成り立つ.

① $D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

② $D=0 \iff$ 重解をもつ

③ $D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

← ③の書き方だけが高1のときと比べて変わったところ.
①, ②はまるっきり同じ!
数Ⅰの教科書を見直してみよう.

注 重解は実数解なので, ①, ②を合わせると

「$D\geqq0 \iff$ 実数解をもつ」

例題2 → 動画

注 $b=2b'$ のときの2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式は次でもよい.

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

例題3 → 動画

応用例題1 → 動画

3. 解と係数の関係

. 解と係数の関係

解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると

和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, 積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

例10 2次方程式 $2x^2+3x-6=0$ の2つの解を α, β とすると、和 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{-6}{2}=-3$

例題4 → 動画

例題5 → 動画

← ほとんど大切な考え方を数Ⅰの教科書で学習している。見比べてみるといいかも…

←「異なる2つの解」ではないつまり $\alpha=\beta$ の場合も含んでいる。このときこの2次方程式は重解をもつ。

← $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を基本対称式という。α を β, β を α に入れかえても変わらない式を対称式という。対称式は基本対称式で必ず表される。

例.

$\alpha^2+\beta^2$ は α を β, β を α に入れかえると $\beta^2+\alpha^2$ であるが、$\alpha^2+\beta^2$ に等しいので対称式。

$\alpha+2\beta$ は α を β, β を α に入れかえると $\beta+2\alpha$ であるが、これは等しいとは限らないので対称式でない。

B. 2次式の因数分解

2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると、 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

← 今まで
因数分解 → 2次方程式の解
今回の式
2次方程式の解 → 因数分解

㊟ 今まで因数分解はかんたんにできるもの
(例. $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$ のような整数の範囲でできるもの)
ばかり考えてきたが、上の公式によって、解の公式から解を求め、その解を利用して無理矢理因数分解する方法を得た(例題6参照)。
よって係数が実数である2次式は、複素数の範囲で常に1次式の積に因数分解できる。

← 今までは実数の範囲(実質、整数の範囲だったが…)内での因数分解しか考えてこなかった。

$\boxed{\text{例題6}}$ → 動画

C. 2次方程式の決定

2数 α, β を解とする2次方程式

2数 α, β を解とする2次方程式の1つは
$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

かき忘れない!

← いくらでも2次方程式は作れるので ~~~ は大切.

㊟ この公式は、今までとは逆に、2次方程式の解がわかっているときにもともとの2次方程式(の1つ)を復元しようという考え方を表している。その手段として解と係数の関係を用いる。

例11 和 $(3+i)+(3-i)=6$、積 $(3+i)(3-i)=10$ より
求める2次方程式の1つは　プラス・マイナスひっくり返し.
$$x^2-6x+10=0$$

← 和の部分はプラス・マイナスをひっくり返して考える必要がある.

研究　2次方程式の実数解の符号

神熱

2次方程式の解の配置

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解 α, β と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次が成り立つ．

1. α, β は異なる2つの正の解
   $\iff D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$
2. α, β は異なる2つの負の解
   $\iff D>0$ かつ $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$
3. α, β は符号の異なる解
   $\iff \alpha\beta<0$

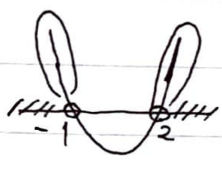
← ここにまとめたのは基本的なパターンのみ．応用範囲は広い．模試では必須の考え方．

補足

上の3で $D>0$ がないのは，$\alpha\beta<0$ の条件が，$D>0$ から得られる条件をすっぽりカバーしているからである．実際，$\alpha\beta<0$ のとき，解と係数の関係より $\dfrac{c}{a}<0$，つまり $ac<0$
このとき $D=b^2-4ac>0$ である．

← $D=b^2-4ac$
0以上　$-4\times$(負)(負)
∴正

例1．$x^2+2mx+(m+2)=0$ が異なる2つの正の解をもつとき，2解 α, β と判別式 $D=(2m)^2-4\times1\times(m+2)$
$=4m^2-4m-8=4(m^2-m-2)=4(m+1)(m-2)$
について，$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ が成り立つ．
解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2m$，$\alpha\beta=m+2$
$D>0$ より $(m+1)(m-2)>0 \iff m<-1,\ 2<m$ —①



$\alpha+\beta>0$ より $-2m>0 \iff m<0$ —②
$\alpha\beta>0$ より $m+2>0 \iff m>-2$ —③
①，②，③の共通範囲より $-2<m<-1$ //