例1つづき

約分すればもどる

(3) $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{21}}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

有理化!

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

第3節　1次不等式

◇ 不等式

$\boxed{\text{左辺}} > \boxed{\text{右辺}}$

$\boxed{\text{両辺}}$

とくにこれは
方程式と同じ

$\boxed{\text{例25}}$

(1) ある数 x の3倍から4引いた数は -1 $\boxed{\text{以上}}$ である。

$$3x - 4 \geqq -1$$

(2) 2数 a, b の和は正で 10より小さい。

$$0 < a + b < 10$$

$\boxed{\text{例26}}$ $\boxed{\text{例27}}$

(1) $a < b$ の両辺に2を加える

↳ 大小関係は変わらない。

(2) $a < b$ の両辺から3を引く

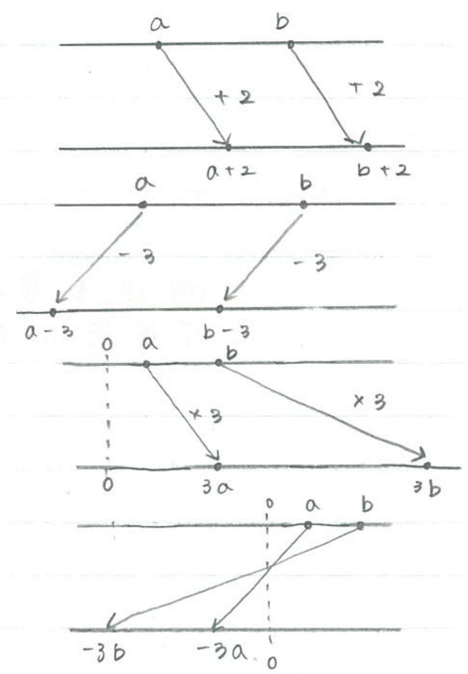
↳ 大小関係は変わらない。

(3) $a < b$ に 正の数3を掛ける。

↳ 大小関係は変わらない。

(4) $a < b$ に 負の数3を掛ける

↳ 大小関係が変わる。



実際に具体的な数で考えて…

(例) $2 < 3$

- $\dfrac{2+2}{4} < \dfrac{3+2}{5}$
- $\dfrac{2-2}{0} < \dfrac{3-2}{1}$
- $\dfrac{2\times 3}{6} < \dfrac{3\times 3}{9}$
- $\dfrac{2\times(-3)}{-6} > \dfrac{3\times(-3)}{-9}$

不等式の性質

1. $A < B$ ならば $A+C < B+C$, $A-C < B-C$
2. $A < B$, $C > 0$ ならば $AC < BC$, $\dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$
3. $A < B$, $C < 0$ ならば $AC > BC$, $\dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$

つまり、両辺 負の数を掛けたり、割ったりすると、
不等号の向きが変わる。

◇ 不等式の解

$\boxed{\text{例28}}$ $2x > 1$

(1) $x=1$ のとき
左辺が 2 より、$x=1$ はこの不等式の解である。

(2) $x=0$ のとき
左辺が 0 より、$x=0$ はこの不等式の解でない。

※ 不等式の解とは、条件を満たす値すべてが解である。

$\boxed{\text{例29}}$

$3x+5 < 14$

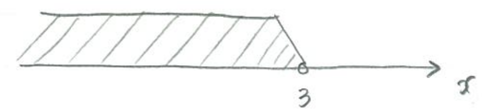
両辺 -5 $(3x+5)-5 < 14-5$

$3x < 9$

両辺 $\div 3$ $x < 3$

3より小さい範囲すべてが解

数直線で表すと、



$\boxed{\text{例30}}$

$-4x-2 \leqq 30$

両辺 $+2$ $(-4x-2)+2 \leqq 30+2$

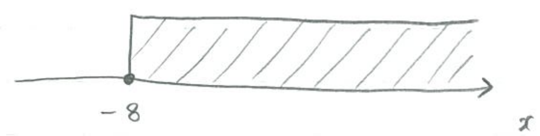
$-4x \leqq 32$

両辺 $\div(-4)$ $x \geqq -8$

負の数でわる。
不等号の向きが変わる。

-8 より大きい範囲すべてが解

数直線で表すと



※ 数直線で表すということは絶対できるように。
$\geqq$, $\leqq$ (以上, 以下) のときは 黒丸で。(その値を含むから)
$>$, $<$ (より大きい, より小さい) のときは 白丸。(その値を含まないから)

例29, 例30では両辺に +3 や −3 などとしたが、
方程式と同じように解いてOK!

$$ax \boxed{+b} > \boxed{cx} + d$$

$$ax \boxed{-cx} > d \boxed{-b}$$

移項

このような x について1次式の不等式を 1次不等式 という。

例題8

(1) $3x - 1 \leqq 9x - 7$

$3x - 9x \leqq -7 + 1$

$-6x \leqq -6$

両辺÷(−6) $x \geqq 1$

(2) $\frac{3}{2}x + 1 > \frac{2}{3}(x-1)$

両辺×6 $6x + 6 > 4(x-1)$

$6x + 6 > 4x - 4$

$6x - 4x > -4 - 6$

$2x > -10$

両辺÷2 $x > -5$

◇ 連立不等式

例題9

$$\begin{cases} 7x - 1 \geqq 4x - 7 & \text{—— ①} \\ x + 4 > 3(1+x) & \text{—— ②} \end{cases}$$

① より $7x - 4x \geqq -7 + 1$

$3x \geqq -6$

$x \geqq -2$

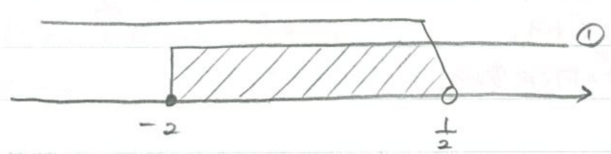
② より $x + 4 > 3 + 3x$

$x - 3x > 3 - 4$

$-2x > -1$

$x < \frac{1}{2}$

①, ② より



よって、共通範囲を求めて、

$$-2 \leqq x < \frac{1}{2}$$

[補足] $A < B < C$ は、$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ と同じ。

例) $4x - 3 < 2x < 3x + 1$

$$\begin{cases} 4x - 3 < 2x \\ 2x < 3x + 1 \end{cases}$$ を解けばよい。

P. 40 $\boxed{7}$ 1次不等式の利用

◇ 1次不等式の応用

応例5 通信販売で1個500円の品物Aと、
1個700円の品物Bを合わせて50個買う。
送料は、品物50個まとめて1500円。
品物代と送料の合計を30000円以下にする。
このとき品物Bは最大で何個買えるか。

式をたてる時に文章をよく読む!
文字に置きたいものは、だいたい文の最後をみる。

合わせて50コだから。

解) 品物Bを x 個買うとすると、品物Aは $(50-x)$ 個

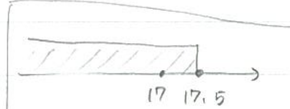
$$\underbrace{500(50-x)}_{A} + \underbrace{700x}_{B} + \underbrace{1500}_{送料} \underbrace{\leqq 30000}_{30000円以下}$$

÷100 $5(50-x) + 7x + 15 \leqq 30000$

$250 - 5x + 7x + 15 \leqq 300$

$2x \leqq 35$

$x \leqq \frac{35}{2} = 17.5$



の中の最大の整数は17

よって、 17個

◇ 絶対値を含む方程式・不等式

例31

わかりづらければ
具体的な数で考えてみる

(1) $|x| = 3$

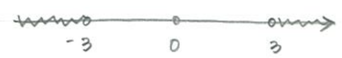
$x = \pm 3$

(2) $|x| < 3$

$-3 < x < 3$

(3) $|x| > 3$

$x < -3, \quad 3 < x$



Cが定数のとき

$\|x\| = c$	の解	$x = \pm c$
$\|x\| < c$	の解	$-c < x < c$
$\|x\| > c$	の解	$x < -c, \quad c < x$

例題10

(1) $|2x - 1| = 3$

$2x - 1 = \pm 3$

$2x = 1 \pm 3$

より $2x = 4, \quad 2x = -2$

よって, $\underline{x = 2, -1}$ //

(2) $|2x - 1| < 3$

$-3 < 2x - 1 < 3$

各辺+1 $-2 < 2x < 4$

各辺÷2 $\underline{-1 < x < 2}$ //

研究 絶対値と場合分け

$a \geqq 0$ のとき $|a| = a$, $a < 0$ のとき $|a| = -a$

(ex) $|2| = 2$, $|-2| = -(-2) = 2$ のこと。)

絶対値の中がプラスかマイナスかの場合分けの問題

例1

(1) $|x - 4| = 3x$

絶対値の中がプラス

[1] $x - 4 \geqq 0$ すなわち, $x \geqq 4$ のとき

$x - 4 = 3x$

$-2x = 4$

$x = -2$ これは $x \geqq 4$ を満たさない。

[2] $x - 4 < 0$ すなわち $x < 4$ のとき

絶対値の中がマイナス

$-(x - 4) = 3x$

$-x + 4 = 3x$

$-4x = -4$

$x = 1$ これは $x < 4$ を満たす。

[1], [2] より $\underline{x = 1}$ //

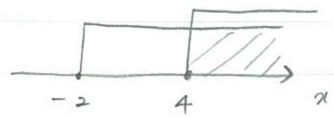
(2) $|x-4| \leqq 3x$

[1] $x-4 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 4$ のとき

$x-4 \leqq 3x$

$-2x \leqq 4$

$x \geqq -2$



$x \geqq 4$ との共通範囲は $x \geqq 4$ ― ①

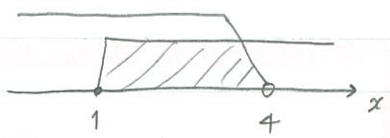
[2] $x-4 < 0$ すなわち $x < 4$

$-(x-4) \leqq 3x$

$-x+4 \leqq 3x$

$-4x \leqq -4$

$x \geqq 1$



$x < 4$ との共通範囲は $1 \leqq x < 4$ ― ②

①, ② より

$x \geqq 1$